メモランダム

幾何平均と調和平均とのかくれた関係

一松　信，柳井　浩

幾何平均と調和平均は，算術平均にくらべると，いささか“影の薄い”平均値であるが，それでも，これらが妥当な場面も少なくない[1]．しかも，これらの2つの平均の間には意外な関係がある．

2つの数 x と y との幾何平均は

$$z=\sqrt{xy} \tag{1}$$

であり，調和平均は

$$\frac{2}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

あるいは，

$$z=\frac{2xy}{x+y} \tag{2}$$

である．

これらの式をみると，あまり関係がないようにも見える．しかし，2つの平均値の等高線をみると，幾何平均のそれは，x および y 軸を漸近線とする双曲線だが，調和平均のそれも，よく似た形をしている．これは，式(2)が，実は

$$\left(x-\frac{z}{2}\right)\left(y-\frac{z}{2}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^2 \tag{3}$$

と変形できるからである．つまり，調和平均の等高線は，$x=z/2$，$y=z/2$ の2直線を漸近線とする双曲線である．

そこで，両者を含む“一般化された幾何平均”をつくってみよう．すなわち，

$$(x-\lambda z)(y-\lambda z) \quad \lambda\in[0,1) \tag{4}$$

という関数の等高線，つまり，

$$x=\lambda z,\ y=\lambda z$$

という漸近線をもつ双曲線を使ってこの上の点 (x, y) が同じ“平均値”z を持つように，“平均値”をこしらえてみる．

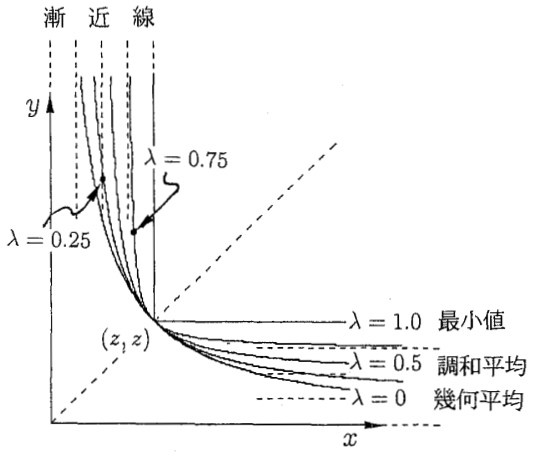
平均値としては，

$$x=z,\ y=z \text{ のとき値が } z \text{ となる} \tag{5}$$

ことが求められるので，

$$(z-\lambda z)^2=(x-\lambda z)(y-\lambda z) \tag{6}$$

が成立しなければならない．これを z について解けば，



“一般化された幾何平均”の等高線

$$z=\frac{-\lambda(x+y)+\sqrt{\lambda^2(x+y)^2+4(1-2\lambda)xy}}{2(1-2\lambda)} \tag{7}$$

となる．(6)式で，$\lambda=0$ とすれば，幾何平均が得られるし，$\lambda=0.5$ とすれば，調和平均が得られる．また，極限として $\lambda=1$ の場合を考えれば，漸近線から考えれば分かるように，

$$z=\min(x, y) \tag{8}$$

つまり，最小値となる．さらに，λ がこれ以外の値の場合にも，(7)式は，一次の同次性や，x および y に関する単調増加性など“広義の平均値”として必要な性質を備えている．

また，点 (z, z) における曲率を計算してみれば，

$$\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}\,z}\frac{1}{1-\lambda} \tag{9}$$

となり，λ の増加とともに増加するから，もしこれが“成績の平均点”の場合ならば，次第に厳しいものになることが分かる．

また，x を x^p，y を y^p，z を z^p，$(p>0)$，で置き換える，さらなる拡張も可能なことにも注意しておこう．

参考文献

[1] 柳井　浩「平均値の意味と構造 I, II」
オペレーションズ・リサーチ，1997年3-4月号．

いちまつ　しん　京都大学名誉教授
やない　ひろし　慶應義塾大学理工学部