講座

半正定値計画とその応用

第3回　半正定値計画による緩和(2)

藤江　哲也

1. はじめに

前回に引続き「緩和問題としての半正定値計画」を取りあげる．今回は，この話題の始まりであるLovászの論文[10]の紹介，そして，その後の展開についてまとめる．なお，第2節，第3節の話題は[1]で詳しく紹介されている．

2. Shannon capacity

情報理論における通信路(channel)を考える．図1(左)は，入力アルファベットを$\{1,2,3,4,5\}$,出力アルファベットを$\{A,B,C,D,E\}$とする通信路を表現する通信路線図である(一般に，入力アルファベット数と出力アルファベット数は等しくなくて良い)．さらに，例えば入力が1であるときに出力がAと判定される確率が1/2であることを示している．論文[12]の主題は，誤り確率0の通信に関するものである．そこで，通信路線図に対して，入力アルファベット集合を頂点集合Vとする無向グラフ$G=(V,E)$を考える．ただし，2頂点$i,j\in V$に対して，iに対する出力とjに対する出力が同じになる可能性があるとき枝で結ぶ$((i,j)\in E)$．図1(左)の場合，$G=(V,E)$は図1(右)のようになる．図1(右)のグラフは，ホールあるいはサイクルとよばれており，$|V|=5$なのでC_5と書くことにする．

ここで，与えられた通信路において，誤り確率0であるような長さ1の入力を考える．例えば図1の場合，1と3が相異なる入力とすることができる．図1(右)のようなグラフ$G=(V,E)$で考えると，

任意の2頂点が枝で結ばれていないような
Vの部分集合S

が相異なる入力とすることができる．グラフ理論では，このような部分集合のことを安定集合(stable set)あるいは独立集合(independent set)とよんでいる．

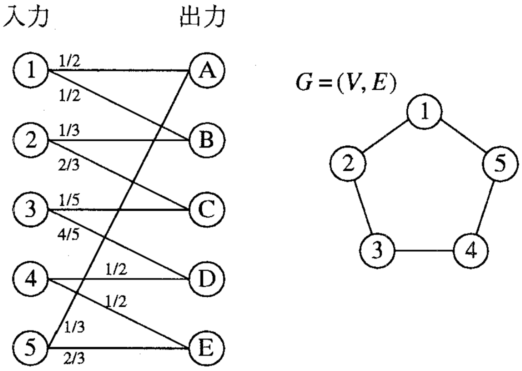

図 1: 通信路線図(左)と5頂点ホールC_5(右)

よって，長さ1の最大入力数は要素数最大の安定集合の大きさに等しく，$\alpha(G)$と書くことにする．特に$\alpha(C_5)=2$である．

次に長さ2の入力を考える．このとき，異なる2つの入力i_1j_1とi_2j_2が同じ出力になる可能性があるのは

「$i_1=i_2$ または $(i_1,i_2)\in E$」
かつ
「$j_1=j_2$ または $(j_1,j_2)\in E$」

となる場合である．そこで，頂点集合を$\{(i,j)\mid i,j\in V\}$，そして同じ出力になる可能性があるような相異なる2頂点(i_1,j_1)と(i_2,j_2)を枝で結んでできるグラフG^2を定義する．G^2は，GとGの直積$G\times G$として知られているものである．一般に，2つのグラフ$G=(V,E)$と$H=(U,F)$の直積$G\times H$は，頂点集合を$\{(i,j)\mid i\in V, j\in U\}$とし，異なる2頂点$(i_1,j_1)$と$(i_2,j_2)$は「$i_1=i_2$ または $(i_1,i_2)\in E$」かつ「$j_1=j_2$ または $(j_1,j_2)\in F$」の場合に枝で結ばれているグラフである．すると，誤り確率0である長さ2の最大入力数は，G^2に関する要素数最大の安定集合の大きさ，すなわち$\alpha(G^2)$に等しくなる．

C_5の場合，$\{1,3\}$が安定集合であることから，4つの入力11, 13, 31, 33を構成することができる．この方

ふじえ　てつや　神戸商科大学商経学部
〒651-2103 神戸市西区学園西町 8-2-1
e-mail: fujie@kobeuc.ac.jp

法は，一般に適用できて

$$\alpha(G^2) \geq \alpha(G)^2$$

であることがわかる．しかし，等号が成り立つとは限らない．実際，$\alpha(C_5^2) = 5$ (11, 23, 35, 42, 54 が最大安定集合)，$\alpha(C_5)^2 = 4$ である．

このようにして，誤り確率0であるような長さ n の入力の最大数は，G の n 個の直積 G^n に関する要素数最大の安定集合の大きさ，すなわち $\alpha(G^n)$ に等しくなる．情報理論では1文字あたりの情報量

$$\frac{\log_2 \alpha(G^n)}{n} = \log_2 \sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

をレート (rate, 伝送効率) とよぶ．また，$n \geq 1$ の範囲での最大数は zero-error capacity とよばれている [12]. zero-error capacity を求めるには log は外して考えてもよい．すなわち，

$$\Theta(G) = \sup_{n \geq 1} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}.$$

が問題の対象となる．$\Theta(G)$ は Shannon capacity とよばれている．C_5 の場合，$\alpha(C_5^2) = 5$ であることより $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$ である．

一般に

$$\alpha(G^n) \geq \alpha(G)^n$$

が成り立つため，$\Theta(G) \geq \alpha(G)$ である．すなわち $\Theta(G)$ の下界が $\alpha(G)$ で与えられる．また，[12] では $\Theta(G)$ の上界が与えられている．これを説明するために，$G = (V, E)$ のクリーク (clique) を，任意の2頂点が枝で結ばれている V の部分集合 C と定義し，$\mathcal{C}$ をすべてのクリークから成る集合族とする．さらに，$\Delta = \{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \sum_{i \in V} x_i = 1\}$ とする．このとき

$$\lambda_0(G) = \min_{\boldsymbol{x} \in \Delta} \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_{i \in C} x_i$$

と定義すると，

$$\Theta(G) \leq \frac{1}{\lambda_0(G)}$$

が成り立つ [12]．実は $1/\lambda_0(G)$ と

$$\lambda(G) = \max \left\{ \sum_{i \in V} x_i \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \\ \sum_{i \in C} x_i \leq 1 \quad (C \in \mathcal{C}) \end{array} \right\}$$

は等しく，[10] では $\lambda(G)$ を用いている．$\lambda(G)$ は線形計画問題であり，$\lambda(C_5) = \frac{5}{2}$ と計算できる．したがって

$$\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \frac{5}{2}$$

であることはわかった．[12] では5頂点以下のグラフについて Shannon capacity を計算しているが，C_5 のみ正確な値が求められていない．そして，その値は，20年以上の月日を経て Lovász によって解決されることになる．

3. Lovász number

Lovász [10] は $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ であることを証明した．そのアイデアは次の通りである．グラフ $G = (V, E)$ の各頂点 $i \in V$ を N 次元単位長ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ ($\boldsymbol{u}_i \in R^N, \boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_i = 1$) として表わす．ただし，$(i, j) \notin E$ に対して $\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{u}_j$ は直交 ($\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{u}_j = 0$) しているようにする．このような $(\boldsymbol{u}_i \mid i \in V)$ を G の正規直交表現 (orthonormal representation) という．また，$\boldsymbol{c} \in R^N$ を単位長ベクトルとする．このとき，

$$\vartheta(G) = \min_{\boldsymbol{c}, (\boldsymbol{u}_i)} \max_{i \in V} \frac{1}{(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u}_i)^2}$$

を Lovász number とよぶ．まず，$\vartheta(G)$ は $\Theta(G)$ の上界であること，すなわち $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$ を示そう．

補題 1 ([10]) $\vartheta(G \times H) \leq \vartheta(G)\vartheta(H)$.

証明： $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ および $\boldsymbol{c}$ を $\vartheta(G)$ を与える正規直交表現 ($\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{c} \in R^N$)，$(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m)$ および $\boldsymbol{d}$ を $\vartheta(H)$ を与える正規直交表現 ($\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{d} \in R^M$) とする．ここで，$\boldsymbol{x} \in R^N$, $\boldsymbol{y} \in R^M$ に対して行列 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$ をベクトルとして表現したものを $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ と書く．すなわち，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1 y_1, x_1 y_2, \ldots, x_1 y_M, x_2 y_1, \cdots)^T \in R^{NM}$$

である．このとき，$(\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_1)^T (\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}_1^T \boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{y}_1^T \boldsymbol{y}_2)$ である．

すると，$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}$ は単位長ベクトルであり，$(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_j \mid {}^\forall i, j)$ は $G \times H$ の正規直交表現であることを示すことができる．よって

$$\begin{aligned} \vartheta(G \times H) &\leq \max_{i,j} \frac{1}{((\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})^T (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{v}_j))^2} \\ &= \max_{i,j} \frac{1}{(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{u}_i)^2} \frac{1}{(\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{v}_j)^2} \\ &= \vartheta(G)\vartheta(H) \end{aligned}$$

となる．■

実は，補題1は等式で成り立つ．すなわち $\vartheta(G \times H) = \vartheta(G)\vartheta(H)$ である [10].

補題 2 ([10]) $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$.

証明：$(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ および $\boldsymbol{c}$ を $\vartheta(G)$ を与える正規直交表現とする．また，$\{1,\ldots,k\}$ を最大安定集合問題の最適解とする (すなわち $\alpha(G)=k$)．このとき，

$$\vartheta(G)=\max_{i\in V}\frac{1}{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_i)^2}\geq\frac{1}{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_j)^2}\quad(j=1,\ldots,k)$$

である．また，$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ は互いに直交している (正規直交表現の定義) ことから

$$\sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_j)^2\leq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}=1$$

を示すことができる．以上より

$$\alpha(G)=k\leq\vartheta(G)\sum_{j=1}^{k}(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_j)^2\leq\vartheta(G)\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}=\vartheta(G)$$

となる． ■

補題1, 2より

$$\alpha(G^n)\leq\vartheta(G^n)\leq\vartheta(G)^n$$

である．したがって

$$\Theta(G)=\sup_{n\geq1}\sqrt[n]{\alpha(G^n)}\leq\vartheta(G)$$

が示された．

そこで，$\Theta(C_5)=\sqrt{5}$ を示すには，$\vartheta(C_5)\leq\sqrt{5}$ を証明すれば十分である．そのために，図2のような R^3 の正規直交表現を構成する．これは，$\boldsymbol{c}$ を把手 (handle) とする傘 (umbrella) を，ひとつおきの骨 (rib) が90度になるように開いた図であり，[1] では Lovász umbrella と名付けている．$ABCDE$ は正五角形であり，S はその重心である．

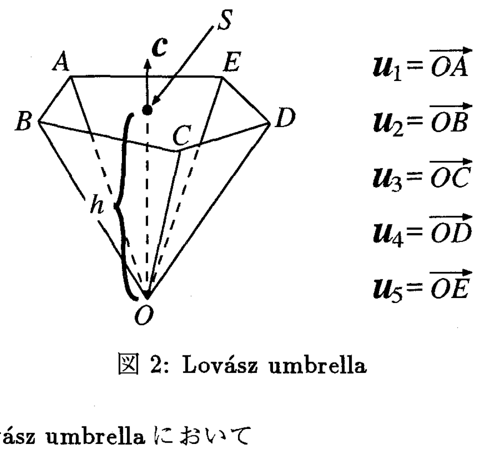

図 2: Lovász umbrella

Lovász umbrella において

$$h=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_1=\cdots=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_5$$

であるから

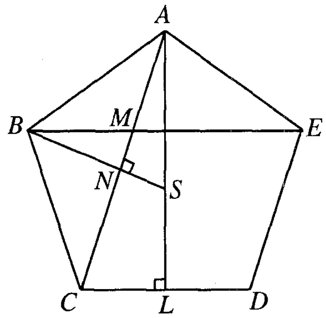

図 3: 正五角形 $ABCDE$

$$\vartheta(C_5)\leq\max_{i\in V}\frac{1}{(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_i)^2}=\frac{1}{h^2}$$

である．そこで h^2 の値を求めよう．そのために，

$$\overline{AB}=a,\ \overline{AC}=d,\ \overline{AS}=s$$

とおく (図3)．まず，$\triangle ABC$ と $\triangle AMB$ が相似であること，および $\overline{BC}=\overline{MC}$ であることから

$$\frac{d}{a}=\frac{a}{d-a}$$

となる．この比 $\tau=\frac{d}{a}$ は $\tau^2-\tau-1=0$ を満たし，黄金比 ($\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) として知られている．次に，$\triangle ASN$ と $\triangle ACL$ が相似であることより

$$s^2=\frac{d^2}{\tau+2}$$

が導かれる．ところで Lovász umbrella の構成方法より，$\triangle OAC$ (図2) は $\overline{OA}=\overline{OB}=1$ の直角二等辺三角形であり，$d=\sqrt{2}$ である．また，$\triangle OAS$ は直角三角形であることから

$$h^2=1-s^2=1-\frac{2}{\tau+2}=\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

となることがわかった．

以上をまとめると，

$$\sqrt{5}\leq\Theta(C_5)\leq\vartheta(C_5)\leq\frac{1}{h^2}=\sqrt{5}$$

となり，したがって

$$\Theta(C_5)=\sqrt{5}$$

であることが証明された．

[10] は，$\Theta(C_5)$ の計算という20年来の問題を解決したばかりでなく，$\vartheta(G)$ に関する様々な考察を行なっている．そのひとつが $\vartheta(G)$ の表現に関するものである．例えば

$$
\text{(EP)} \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \lambda_1(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) \to \text{最小化} \\ \text{条件:} & A_{ii}=0 \ \ (i \in V), \\ & A_{ij}=0 \ \ ((i,j) \notin E). \end{array} \right.
$$

という固有値最小化問題の最適値が $\vartheta(G)$ に一致することが証明されている．ただし，$\boldsymbol{E}$ はすべての要素が 1 である行列である．前回紹介したように，固有値最小化問題は次の半正定値計画問題と同値である．

$$
(\text{EP}_1) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & z \to \text{最小化} \\ \text{条件:} & z\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}) \succeq \boldsymbol{O}, \\ & A_{ii}=0 \ \ (i \in V), \\ & A_{ij}=0 \ \ ((i,j) \notin E). \end{array} \right.
$$

(EP_1) の変数は z と A_{ij} $((i,j) \in E)$ である．したがって，$\boldsymbol{E}_{ij}$ を第 (i,j) 要素と第 (j,i) 要素が 1 で残りがすべて 0 である行列とすると

$$
(\text{EP}_1) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & z \to \text{最小化} \\ \text{条件:} & z\boldsymbol{I}-\left(\boldsymbol{E}+\sum_{(i,j)\in E} t_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\right) \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.
$$

とできる．よって (EP_1) の双対問題は

$$
(\text{SDP}_1) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & \boldsymbol{I} \bullet \boldsymbol{X} = 1, \\ & \boldsymbol{E}_{ij} \bullet \boldsymbol{X} = 0 \ \ ((i,j) \in E), \\ & \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.
$$

すなわち

$$
(\text{SDP}) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{E} \bullet \boldsymbol{X} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & \boldsymbol{I} \bullet \boldsymbol{X} = 1, \\ & X_{ij} = 0 \ \ ((i,j) \in E), \\ & \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.
$$

で与えられる．このとき

$$
\alpha(G) \le \vartheta(G) = v(\text{SDP})
$$

が成り立つ．この (SDP) が半正定値計画緩和の始まりと言われているものである．現在，半正定値計画問題は多項式時間で解けることが知られているため，$\vartheta(G)$ は多項式時間で計算できることがわかる．より正確には，与えられた誤差 $\epsilon > 0$ の範囲内で $\vartheta(G)$ の近似値を計算する．これは，$\vartheta(G)$ の値が無理数となる場合があるからである (例えば $\vartheta(C_5)=\sqrt{5}$)．$\vartheta(G)$ が多項式時間で計算できる事実は，Grötschel, Lovász and Schrijver [5] によって示された．その方法は楕円体法によるものである．

4. パーフェクトグラフ

$\vartheta(G)$ が多項式時間で計算できることによる重要な帰結として，パーフェクトグラフに対する最大安定集合問題が多項式時間で解けることが示される [5].

この事実を説明するために，まずパーフェクトグラフを定義する．グラフ $G=(V,E)$ の k-彩色とは，V の k 個の安定集合への分割である．ここで，

$\omega(G)$: G の最大クリークの要素数

$\gamma(G)$: G が k-彩色をもつ最小の k

と記号を導入する．$\omega(G) \le \gamma(G)$ を確認するのは難しくない．しかし，等号が成り立つとは限らない．例えば，$2=\omega(C_5) < \gamma(C_5) = 3$ である．Berge は，$G=(V,E)$ が次の条件を満たすときパーフェクトグラフ (perfect graph) と定義をした：

任意の誘導部分グラフ H に対して $\omega(H)=\gamma(H)$ が成り立つ．

ここで，誘導部分グラフとは，$T \subseteq V$ に対して $G[T]=(T,E[T])$, $E[T]=\{(i,j)\in E \mid i,j \in T\}$ として定義されるグラフのことである．

パーフェクトグラフには様々な特徴付けが存在する ([4] など)．その中でも，数理計画と関連の深い特徴付けを紹介するために，2 つの多面体 STAB(G), QSTAB(G) を導入する．$S \subseteq V$ に対して $\chi^S \in \{0,1\}^V$ を『$\chi_i^S = 1 \ \Leftrightarrow \ i \in S$』として定義される支持ベクトルとする．また，$F \subseteq R^V$ の凸包を conv(F) と記す．このとき

$$
\text{STAB}(G) = \text{conv}\left(\{\chi^S \in \{0,1\}^V \mid S : \text{安定集合}\}\right)
$$

と定義する．また，$\lambda(G)$ の定義に現れる実行可能解集合を

$$
\text{QSTAB}(G) = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \\ \sum_{i\in C} x_i \le 1 \ \ (C \in \mathcal{C}) \end{array} \right\}
$$

とする．このとき次の定理が成り立つ．

定理 3 ([2, 3])

G : パーフェクト $\Leftrightarrow$ STAB(G) = QSTAB(G). ■

$\alpha(G)$, $\lambda(G)$ はそれぞれ

$$
\alpha(G) = \max\left\{ \sum_{i\in V} x_i \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \text{STAB}(G) \right\},
$$

$$
\lambda(G) = \max\left\{ \sum_{i\in V} x_i \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \text{QSTAB}(G) \right\}
$$

として計算される．また，

$$\alpha(G) \le \Theta(G) \le \vartheta(G) \le \lambda(G)$$

であることが示されている[10]．したがって，Gがパーフェクトのとき，$\mathrm{STAB}(G) = \mathrm{QSTAB}(G)$ より $\alpha(G) = \lambda(G)$，すなわち

$$\alpha(G) = \Theta(G) = \vartheta(G) = \lambda(G)$$

となる．よって$\alpha(G)$ (および$\Theta(G), \lambda(G)$)は多項式時間で計算することができる．

実は，[5]ではパーフェクトグラフに対する重み付き最大安定集合問題が多項式時間で解けることを示している．ここで，重み付き最大安定集合問題とは，非負ベクトル $\boldsymbol{w} \in R^V$ に対して

$$\begin{aligned} \alpha(G, \boldsymbol{w}) &= \max\{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \chi^S \ (S:\text{安定集合})\} \\ &= \max\{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{STAB}(G)\} \end{aligned}$$

として定式化される問題である．特に$\alpha(G) = \alpha(G, \mathbf{1})$である($\mathbf{1}$はすべての要素が1のベクトル)．いま，$\boldsymbol{w}$は整数ベクトルであるとしよう．このとき，$G$と$\boldsymbol{w}$より $\alpha(G, \boldsymbol{w}) = \alpha(G_{\boldsymbol{w}})$ を満たすグラフ $G_{\boldsymbol{w}}$ を構成することができる．しかもGがパーフェクトならば$G_{\boldsymbol{w}}$もパーフェクトであることが証明されている[9]．したがって，パーフェクトグラフ G に対して $\alpha(G, \boldsymbol{w}) = \alpha(G_{\boldsymbol{w}}) = \vartheta(G_{\boldsymbol{w}})$ であるから，$\vartheta(G_{\boldsymbol{w}})$を計算すればよい．ただし，単に$G_{\boldsymbol{w}}$を構成すると多項式時間算法にはならず，[5]では$\vartheta(G_{\boldsymbol{w}})$が半正定値計画問題

$$(\mathrm{SDP}_{\boldsymbol{w}}) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{W} \bullet \boldsymbol{X} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & \boldsymbol{I} \bullet \boldsymbol{X} = 1, \\ & X_{ij} = 0 \ \ ((i,j) \in E), \\ & \boldsymbol{X} \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.$$

の最適値に等しいことを示し，$(\mathrm{SDP}_{\boldsymbol{w}})$を楕円体法で解いている．ここで$\boldsymbol{W}$は，$\boldsymbol{W} = \sqrt{\boldsymbol{w}}\sqrt{\boldsymbol{w}}^T$，$\sqrt{\boldsymbol{w}} = (\sqrt{w_i} \mid i \in V)$として定義される行列である．

$\vartheta(G, \boldsymbol{w}) = \vartheta(G_{\boldsymbol{w}})$と定義する．すると，$\vartheta(G, \boldsymbol{w})$は $(\mathrm{SDP}_{\boldsymbol{w}})$ のような計算式が存在する．しかし，$\alpha(G, \boldsymbol{w})$のように，$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$を目的関数とする特徴付けが望ましいはずである．そして，その答えが[6]に与えられている．

それは，Gの正規直交表現$(\boldsymbol{u}_i \in R^N \mid i \in V)$および単位長ベクトル $\boldsymbol{c} \in R^N$ について

$$\sum_{i \in V} (\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{u}_i)^2 x_i \le 1$$

を正規直交表現制約とよび，

$$\mathrm{TH}(G) = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \;\middle|\; \begin{array}{l} \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{x}\ \text{はすべての正規直交} \\ \quad \text{表現制約を満たす} \end{array} \right\}$$

と定義する．このとき

$$\vartheta(G, \boldsymbol{w}) = \max\{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{TH}(G)\}$$

が成り立つのである[6]．

正規直交表現制約は線形不等式であるが，その数は一般に無限なので，$\mathrm{TH}(G)$は凸集合ではあるが多面体とは限らない．ただし，$\mathrm{TH}(G)$上で線形関数$(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})$を最大化する問題は多項式時間で解けることが示されている[6]．また，$\alpha(G) \le \vartheta(G) \le \lambda(G)$ であったから

$$\mathrm{STAB}(G) \subseteq \mathrm{TH}(G) \subseteq \mathrm{QSTAB}(G)$$

であることが予想されるが，これが実際に成り立つことが [6] で証明されている．$\mathrm{STAB}(G)$ および $\mathrm{QSTAB}(G)$ 上で線形関数を最大化する問題はともにNP困難である[6]ことを考えると，これは興味深い結果である．また特に，Gがパーフェクトのとき

$$\mathrm{STAB}(G) = \mathrm{TH}(G) = \mathrm{QSTAB}(G)$$

であり，$\mathrm{TH}(G)$は多面体である．実は，その逆も正しい．すなわち

定理 4 ([6]) $\mathrm{TH}(G)$:多面体 $\Leftrightarrow$ G:パーフェクト．■

したがって，Gがパーフェクトでない場合，

$$\mathrm{STAB}(G) \subset \mathrm{TH}(G) \subset \mathrm{QSTAB}(G)$$

で，等号は成り立たず，しかも$\mathrm{TH}(G)$は多面体ではないことがわかる．定理4の系として

系 5 ([6]) $\mathrm{TH}(G) = \mathrm{STAB}(G) \Leftrightarrow G$:パーフェクト．■

系 6 ([6]) $\mathrm{TH}(G) = \mathrm{QSTAB}(G) \Leftrightarrow G$:パーフェクト．■

が成り立つ．定理4，系5, 6はパーフェクトグラフの興味深い特徴付けである．

なお，第3節，第4節の内容は[7]に詳しい．

5. 線形化

[6]では，$\mathrm{TH}(G)$に関する複数の表現を与えている．そして，前回紹介したLovász and Schrijverの論文[11]では，$\mathrm{TH}(G)$のさらに新しい表現が与えられている．この表現は，前回解説した線形化による半正定値計画緩和問題にほかならない．これを説明するために，次の非凸2次計画問題を考えよう：

$$
(\mathrm{QP}) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & x_i x_j = 0 \qquad ((i,j) \in E), \\ & x_i^2 - x_i = 0 \quad (i \in V). \end{array} \right.
$$

ここで,「$x_i^2 - x_i = 0 \Leftrightarrow x_i \in \{0,1\}$」であることなどを考慮すると,(QP) の実行可能解集合は安定集合の支持ベクトル集合となる.したがって,(QP) は重み付き最大安定集合問題の定式化になっている.

(QP) を線形化によって

$$
(\mathrm{QP}_L) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & X_{ij} = 0 \qquad ((i,j) \in E), \\ & X_{ii} - x_i = 0 \quad (i \in V), \\ & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = \boldsymbol{O} \end{array} \right.
$$

のように再定式化すると,半正定値計画緩和問題

$$
(\overline{\mathrm{QP}_L}) \left| \begin{array}{ll} \text{目的:} & \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x} \to \text{最大化} \\ \text{条件:} & X_{ij} = 0 \qquad ((i,j) \in E), \\ & X_{ii} - x_i = 0 \quad (i \in V), \\ & \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right.
$$

が得られる.すると

$$
\vartheta(G, \boldsymbol{w}) = v(\overline{\mathrm{QP}_L})
$$

が成り立つ [11].これを TH(G) との関係でいうと次のようになる:

定理 7 ([11])

$$
\mathrm{TH}(G) = \left\{ \boldsymbol{x} \in R^V \left| \begin{array}{l} ^\exists \boldsymbol{X} \in \mathcal{S}^V \text{ such that} \\ \quad X_{ij} = 0 \qquad ((i,j) \in E), \\ \quad X_{ii} - x_i = 0 \quad (i \in V), \\ \quad \boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \succeq \boldsymbol{O} \end{array} \right. \right\}.
$$

■

ここにきて,前回紹介した線形化と Lovász number の理論が結びついた.したがって,半正定値計画緩和の一般論が Lovász number および TH(G) の理論へ適用できるようになった.今後も理論のさらなる発展が期待できる.

6. おわりに

今回は,$\Theta(C_5) = \vartheta(C_5) = \sqrt{5}$ であることを中心とした解説を行なった.しかし,一般には $\Theta(G)$ と $\vartheta(G)$ は等しくない [8] ことを注意しておく.

$\vartheta(G)$ に比べ,$\Theta(G)$ には知られていないことが多い.例えば,7 以上の奇数 m について $\Theta(C_m)$ の値は知られていないようである.また,$\Theta(G)$ が多項式時間で計算できるかどうかも知られていないらしい.$\Theta(G)$ の定義式どおりに計算をすることは,おそらく不可能であろう.よって,$\Theta(G)$ を計算する手段はあるのだろうか,とすら思えてくる.そして,それを思うとき,Lovász の卓越したアイデアにただ関心するばかりであり,また,その後の理論の発展にはただ驚くばかりである.

参考文献

[1] Aigner M. and Ziegler G.M.: "Proofs from THE BOOK", Springer (1999).

[2] Chvátal, V.: On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory ser.B* **18** (1975) 138–154.

[3] Fulkerson, D. R.: On the perfect graph theorem. in "Mathematical Programming" (Hu and Robinson eds.) pp. 69–77, Academic Press, 1973.

[4] Grötschel, M.: Characterization of perfect graphs. *OPTIMA* (newsletter of the Mathematical Programming Society), **62** (1999) 2–5.

[5] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, **1** (1981) 169–197.

[6] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: Relaxations of vertex packing. *Journal of Combinatorial Theory ser.B* **40** (1986) 330–343.

[7] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A.: "Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization", Springer (1988).

[8] Haemers, W.: On some problems of Lovász concerning the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **25** (1979) 231–232.

[9] Lovász L.: Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, **2** (1972) 253–267.

[10] Lovász L.: On the Shannon capacity of a graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, **25** (1979) 1–7.

[11] Lovász L. and Schrijver A.: Cones of matrices and set functions and 0-1 optimization. *SIAM J. on Optimization*, **1** (1991) 166–190.

[12] Shannon C. E.: The zero-error capacity of a noisy channel. *IRE Trans. Inform. Theory*, **3** (1956) 3–15.