

分岐型ジョブのスケジューリング問題 に対するラグランジュ分解・調整法

今泉 淳, 森戸 晋

1. はじめに

ここ数年、ラグランジュ分解・調整法によるスケジューリング技法に関する研究が盛んである。昨年の11月、筆者(今泉)が幹事を務めている「COM・SCM・スケジューリング研究部会」の100回記念研究会を「ラグランジュ緩和法とスケジューリング」というテーマで開催したところ、比較的堅い内容(?)であったにもかかわらず多数の参加者、特に企業の実務家の参加が多数あり、その関心の高さを窺わせた。

ラグランジュ緩和法やそれに基づく一般的な話は、たとえばReeves [3]や前述の100回記念研究会の配布資料 [2]に譲ることにして、本稿では我々が扱った現実の生産システム [9]を簡略化した問題に対して、ラグランジュ分解・調整法によるスケジューリングを試みた過程を紹介することにする。

2. 問題に出会うまで

筆者等が前述の「現場の問題」 [9]と格闘していたのは、1995年頃である。我々ORの専門家が理論的な意味で「難しい」(例えばNP完全とか)と感じるのは全く別の意味で、現実の問題が難しいことをこの問題を通じて痛感した。具体的には、要因や決定項目の多さ、問題の規模などの面で、定式化や既存の解法の適用では済まされない側面があり、その問題に固有の性質や特徴を加味した上で我々なりに考えたアプローチを、拙稿 [9]として報告させていただいた。

筆者等は、このような現実の問題に対してチャレンジする一方で、現実の問題に根ざしつつできる限りその本質を抽出した「美しいモデル」に対するアプ

チもしたいという欲求を常々持っていた。しかし、当時は、とりあえず優先順位の関係で、「美しいモデル」がなんであるかを考えたり、またそれを実際に解決するという作業には移れないでいた。

ちょうどその時期の前後、Conneticut大のLuh教授が一連の研究(例えば [5] [6]など)の成果を「CIM環境下における生産計画とスケジューリング研究部会」で発表されたことを通じてその内容を耳にし、1995年の春には、当時東芝におられた米田清氏(現福岡大学)の紹介によって早稲田大学にてLuh教授の講演をじかに聞くことができた。それ以来、我々が直面していた問題から「美しいモデル」を抽出して、それに対してラグランジュ分解・調整法の適用を試みてみたいという願望を持っていたが、実際にそれを実行に移せたのは、Luh教授の講演を聴いてからさらに2年近く経った後のことである。

3. 問題

ここで、本稿が対象とする問題を簡単に説明する。対象とするシステムは2工程からなる一種のハイブリッドフローショップであり(図1)、ジョブ(作業)は第1工程と第2工程の指定の機械(所与)で加工を受けた後に完成する。加工時間(日数単位)は既知である。また、加工の中断は許さない。評価尺度は第2工程の各作業に与えられた納期に対する総納期遅れであり、これを最小化するように、各作業の開始時刻(時間は離散化されているので開始日)を決定する。

ここまでは、理論的研究における標準的なスケジューリング問題から大きく離れるものではないが、通常のフローショップスケジューリング問題との違いは、以下の2点にある。

i) **ジョブが分岐する** 各ジョブは第1工程で加工を終了すると中間品となりそのまま在庫置場(容量は無限)に(連続的に)たまり、その中間品を使って一般に複数の作業が行われる。すなわち、ジョ

いまいずみ じゅん 東洋大学経営学部

〒351-8510 埼玉県朝霞市岡2-11-10

もりと すすむ 早稲田大学理工学部

〒169-8555 東京都新宿区大久保3-4-1

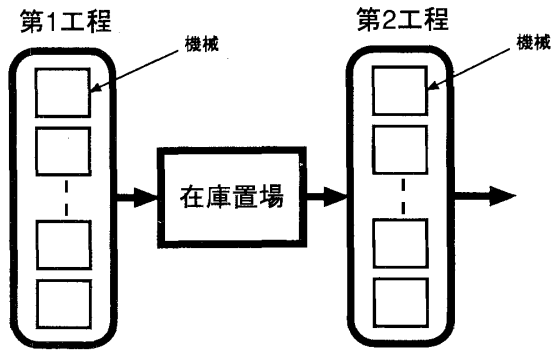
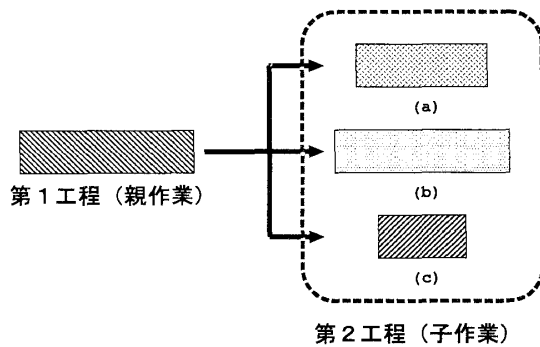


図 1 システムの概要



- ・各作業とも、加工機械と加工時間は所与
- ・ (a) (b) (c) が「兄弟作業」

図 2 ジョブとその分岐

ブの分岐を許す (図 2)。

ii) 中間在庫があれば第 2 工程での加工が開始できる

あるジョブの第 1 工程における加工が終了していても、在庫切れによる加工の中断を起こさない限り第 2 工程における加工を行う (開始) することができる。

ジョブの分岐とは、ひとつの中間品から複数の最終品が作られることを意味し、工程の進行とともに製品が細分化されていく装置産業などによく見られるジョブの形態であると言える。ii) のような、隣接する工程の作業が時間軸上でオーバーラップしても良いような問題は、タイムラグ付きの問題やロットストリーミング [4] などと関連がある。また、ハイブリッドフローショップに対するスケジューリング問題も、多くのモデルや解法に関する研究があるものの、筆者等が知る限り類似の問題を見出すことはできなかった。

ここで留意すべきなのは、i) と ii) のそれぞれ単独ではそれほど厄介ではないが、本問題では両者が同時に存在するがゆえに表裏をなす一つの要因となっており、後述するように本問題に対するアプローチで工夫を必要とする原因となっている、ということである。

ここで、あるジョブに対して、

- 第 1 工程の作業のことを「親作業」
- 第 2 工程の作業のことを「子作業」、(同一ジョブ内の) 第 2 工程の作業群のことを「兄弟作業」

と呼ぶ。ある日の親作業の加工終了分は、翌日に利用可能となる。ここでは簡単のために、あるジョブの兄弟作業は全て相異なる機械で加工されるものとする。

さて、この問題をどのようにして解くかだが、種々のアプローチの中から選んだのが、ヒューリスティック解法ではあるが下界値によって精度の評価が行える Luh et al. [6] の研究に始まる、一連のアプローチ法である。

4. どのような緩和を考えるか?

本来、ラグランジュ緩和に限らず緩和問題は下界値 (原問題が最小化問題の場合) を提供するのが最大の役割であり、分枝限定法では下界値の情報の活用を前提にしている。その緩和の度合によって、緩和問題の解き易さや下界値の精度が変わってくることは周知の通りである。一般に、緩和をすればするほど緩和問題を解くのが簡単になり、その代償として下界値の精度が悪くなる。逆に、原問題の特徴を残すほど下界値の精度は良くなるものの、元々解き難い原問題に近づくことになるため最適化が難しい。そこで、解き易さと下界値の精度のトレードオフを見極めながら、どのような緩和が望ましいかを考えるのが、解き手の腕の見せどころである。

ところで、Luh 教授のアプローチの基本的な考え方は、一連の研究のうち比較的初期の文献 [5][6] などに見られるように、ラグランジュ緩和を行うことによって、

- 機械が同時にいくつもの作業を加工できる (機械の能力を緩和する)
- 多工程のショップの場合は、先行する作業が終ってなくても当該作業は開始できる (先行順序に関する制約も緩和する)

という緩和問題を得て、

- 緩和問題は作業単位の部分問題に分解できる（分解可能性）
- 部分問題それぞれは多項式オーダーで最適化できる

というメリットを得るものである。

また、緩和問題の最適解から各作業の優先順位を決めリストスケジューリングによって高速に実行可能スケジュールを生成するが、ラグランジュ乗数を更新しつつこれらを反復することで、最終的に良いスケジュールを得ることが可能であり、さらに下界値によって実行可能スケジュールの精度も評価できることが謳文句となっていた。すなわち、下界値のみならず上界値も得られるので、スケジューリングを行う我々としては誠に嬉しい話である。

ただ、このような方法がどのような場合に良く働き、どのような場合にうまくいかないか、またうまくいかないときにはどのようにすれば良いのかということ、当然のことながら問題に依存する事柄であろう。

5. 最初のアプローチ（緩和法1）

方法を適用する場合には、まず先人のやり方をそのまま踏襲するというのが一つの考え方であろう。緩和問題を考えることを前提にする本アプローチでは、まず緩和のやり方にいくつかの選択肢があるが、「やり易そうな方法」という位置づけではじめたのが、緩和法1である。

緩和法1:全部の機械の能力を緩和する

緩和法1は、第1工程、第2工程共に機械の能力を緩和してしまおうというアプローチ [8] である。このアプローチは、

- 緩和問題はジョブ単位の部分問題に分解できる
- 部分問題は、各作業の開始日に応じて計算される機械の使用料 [11]（ラグランジュ乗数の和）と納期遅れの和を最小化する問題になる

というものである。部分問題は、具体的には図3のような、「各日の中間在庫量の非負制約を守りつつ、各作業の機械使用料と各子作業の納期遅れの総和を最小にするように各作業の開始日を決定する問題」とな

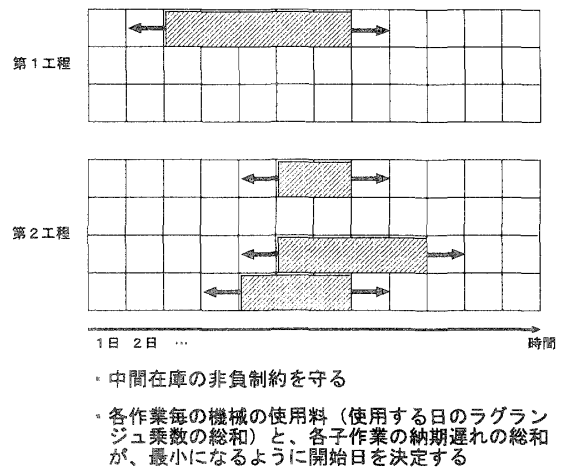


図3 緩和法1 「両工程緩和」

る。緩和問題の最適化は、緩和問題が分解可能であるため、原問題に対するそれに比べた場合の手間は大きなものではないはずだが、それでも組合せ最適化問題であり多項式オーダーでは解けないため、それなりの手間を要することも事実である。

Hoitomt et al. [5] のように作業の先行関係制約まで緩和することも考えたが、その制約に対応する本問題における制約は各日の中間在庫量非負制約であり、これを数式で表現しづらいことや、機械の能力を緩和してさらに在庫量非負制約までも緩和するのはアプローチの第一段階として緩和の度合が過度であり、さらにラグランジュ乗数の数の増加等も考慮し、採用しなかった。このような先行制約を緩和しないやり方は、Chen et al. [1] も試みている。

まず、緩和法1と単純なリストスケジューリングの組合せによる手順で、数値実験を行った。とりあえずの目標として双対ギャップ（ $(\text{上界値} - \text{下界値}) \div \text{下界値} \times 100 (\%)$ ）の値が20%～30%程度になることを期待し、それ以上の改善は工夫次第と考えていた。しかし、数値実験を行ってみると、実際には実用に供するにはほど遠い結果（平均で40%以上）を示し、それを改良の出発点とするには厳しい状況であった。これは、

- 緩和の方法に工夫が足りなかったこと（下界値算出の問題）
- 緩和問題の結果を「優先順位」という相対的順序関係に置き換えることが、本問題では必ずしも良いとは言えないこと（上界値算出の問題）

のいずれか（もしくは両者）に起因するものと推定した。

とりあえず、リストスケジューリングを改良したり、さらに局所探索法を組み込むなど多少の工夫を試みてみたが [8]、単純なリストスケジューリングよりはましであるものの根本的な解決と見做せるまでには至らなかった。

本問題では兄弟作業間で中間在庫（正確には、親作業の開始日に対して決まる累積生産量）への競合が生じ、あるジョブの特定の子作業の開始を早めると、同一ジョブ内の他の兄弟作業の開始を遅れさせる結果を招きかねず、その場合は開始が遅くなった子作業の納期遅れ量にも悪影響を与えかねない。すなわち、納期遅れを考慮しながら中間在庫への競合を解決する必要があり、この役割を担うのが緩和問題の最適化である、と解釈できる。

しかし、そもそも第1工程の機械能力を緩和しているため（すなわち、作業同士の重なりや作業間の遊休が生じ得るため）、実行可能スケジュールを生成する際には部分問題の最適化でせつかく決定した親作業の開始日が変わる可能性がある。さらに、Luh等が使っているリストスケジューリングのような方法を採用すると兄弟作業の開始日の関係が優先順位に変換されてしまい、緩和問題の最適解を有効に活用できていない恐れのみならず、緩和法そのものが有用な情報を提供できていない恐れもある。

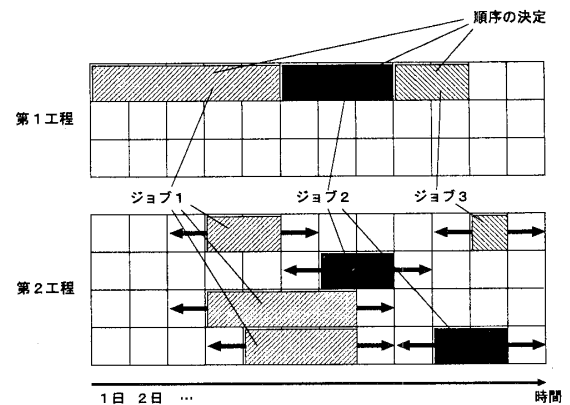
すなわち、中間在庫への競合を解決してもらったにもかかわらず、それを活かしていない、あるいは競合を解決する前提条件が適当でないということである。

6. 代替案の検討（緩和法2）

このように、期待した結果や効果が得られない場合には、当然なんらかの対策が必要である。

ところで、緩和問題の本来の主目的は下界値を得ることであり、それを忘れて実行可能スケジュールの生成（上界値算出）で策を弄する（複雑なアルゴリズムを考えたり、計算において多大な手間をかける）のは本末転倒である。

よって、緩和法をそのままにして実行可能スケジュールの生成法を云々する等の小細工では駄目で、緩和のやり方を刷新することが必要である。そこで、緩和問題に応じて上界値の算出法を考えることを前提にしたのが、代替案である緩和法2である。



- ・第1工程の特定の機械に着目し、その機械上の作業の順序を決定（作業の重なりは許さない）
- ・中間在庫の非負制約を守る
- ・上記の親作業の子作業全てに対して、機械の使用料と納期遅れを計算し、それが最小になるように開始日を決定する（作業の重なりは許す）

図4 緩和法2 「第2工程のみの緩和」

緩和法2: 第2工程のみの機械の能力を緩和する

緩和法2は、第2工程のみの機械能力を緩和するアプローチ [10] である。このアプローチにおいて、緩和問題は「第1工程の同一機械で加工を受けるジョブ群単位」へ分解される。分解された部分問題それぞれは、緩和法1によって分解される部分問題よりも問題規模としては大きく、最適化により時間がかかると予想される。

部分問題は、具体的には図4のような、第1工程のある特定の機械に着目した場合の各ジョブに対して、各日の中間在庫の非負制約を守りつつ、第2工程の機械上での作業の重なり（機械の重複使用）を許した上で、機械の使用料（ラグランジュ乗数の和）とそれらジョブ群（正確には、それらジョブ群の子作業群）の納期遅れの和を最小化する問題となる。

7. 緩和法2に基づく方法の評価

ところで、本稿が対象としている問題は、

- 第1工程では、作業間に遊休のあるスケジュールは考えなくて良く、各機械上では順序だけ考えれば十分である
- 緩和問題を最適化して親作業の開始日を求めても、実行可能スケジュールにおいてその開始日にならなかった場合（このことは本問題に限らない話であるが）、中間在庫への競合があるがゆえ

に、後続の子作業の開始日をどのように変更すべきかが不明である

などの特徴を有している。

緩和の度合は、緩和問題がどの程度まで分解可能かという形で緩和問題の最適化の手に影響を与える。その一方で緩和の度合が下界値の精度に与える影響も無視し得ない。また、緩和問題の本来の役割が下界値計算にあるといっても、Luh 等のアプローチでは緩和問題を参考にして実行可能スケジュールの生成（上界値の算出）を行う以上、手順全体を構成する上では、問題の性質、緩和の方法、実行可能スケジュールの生成の方法のそれぞれを視野に入れる必要がある。

その意味で、本稿が対象とする問題の性質や特徴を無視し、その一方で緩和問題の分解可能性や部分問題の大きさを重視したり、漫然と Luh 等の方法をそのまま受け入れることは、必ずしも適当とは言えない。また、緩和法の議論をそっこのけにして、実行可能スケジュールの生成に目を奪われるのも良くない。

つまり、緩和問題を分解して生成される部分問題がある程度大きくなってその最適化に手間がかかっても、下界値の精度やその後で行う実行可能スケジュールの生成に対して有用な情報を提供するという観点からは、最適化に多少の手間がかかることを忍んでも問題の特徴を残す緩和を行うことが必要となる。

緩和法 2 の緩和問題の解は、第 1 工程についてはそのまま実行可能スケジュールの生成の際に流用できる。そこで、このことを利用した独自の工夫による実行可能スケジュールの生成法を代理劣勾配法 [7] と組合せた手順と、一番最初に試みた緩和法 1 をリストスケジューリングに基づく方法と組み合わせた手順を同一の問題群で比較したところ、平均的に下界値で約 20%、上界値で約 30%の改善があった。

現在までに行った実験の範囲内では、納期のばらつきなどによって結果が異なるものの、以上に述べた工夫を施すことによって双対ギャップの平均を約 15%以下に収められるという数値結果を得ている。

8. おわりに

本問題では「兄弟作業間の中間在庫への競合の解決」をどこかで行う必要があり、アプローチ全体の構成から考えて「緩和問題の最適化」か「実行可能スケジュールの生成」のいずれかが担わざるを得ない。

「競合の解決」を「緩和問題の最適化」が行うなら

ば、過度な緩和を行った緩和問題に良い結果は期待できず、原問題に近い緩和なら「競合の解決」の信頼度は高いが、最適化に手間がかかたりラグランジュ分解・調整法の一つの柱である「分離可能性」が達成できなくなる恐れがある。

かといって、緩和問題の最適化の手間を省くことを重視し「競合の解決」を実行可能スケジュールの生成に任せるのは、緩和問題の解が提供する情報の量や質、さらに下界値の精度に悪影響を与える可能性がある。また、必然的に実行可能スケジュールの生成を工夫せざるを得ないが、手間をかけすぎると「シンプルさ」が損なわれてしまう上に、ラグランジュ分解・調整法を用いる意義が失われてしまう。

大事なのは「緩和問題に何を期待するのかを意識した上で、緩和のやり方を考えること」であり、本問題の場合は下界値の算出の他に前述の「競合の解決」という役割を担っている。このように、緩和のやり方は緩和問題の解き易さと下界値の精度のみならず、上界値の生成時に参照できる情報の内容にも影響を与え、最終的には生産現場のスケジューラが欲する実行可能スケジュールの質にも影響が及ぶ可能性を指摘して、本稿を締めくくりたい。

なお、本稿執筆にあたって 2 番目の著者は、科学研究費補助金基盤研究 (C)(2)11680454 の補助を受けました。

参考文献

- [1] H. Chen, C. Chu, and J.-M. Proth. A more efficient Lagrangian relaxation approach to job-shop scheduling problems. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 494–501, 1995.
- [2] COM・SCM・スケジューリング部会編. ラグランジュ緩和法とスケジューリング. COM・SCM・スケジューリング部会, 開催 100 回記念研究会 配布資料, 1999.
- [3] C.R.Reeves 編, 横山隆一他訳. モダンヒューリスティクス-組合せ最適化の先端手法. 日刊工業新聞, 1997.
- [4] S. Dauzère-Pérès and J.-B.Lasserre. Lot streaming in job-shop scheduling. *Opns.Res.*, Vol. 45, No. 4, pp. 584–595, 1997.

- [5] D.J. Hoiomt, P.B. Luh, and K.R. Pattipati. A practical approach to job-shop scheduling problems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 1, pp. 1–13, Feb. 1993.
- [6] P.B. Luh, D.J. Hoiomt, E. Max, and K.R. Pattipati. Scheduling generation and reconfiguration for parallel machines. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 6, pp. 687–696, Dec. 1990.
- [7] X. Zhao, P.B. Luh, and J. Wang. Surrogate gradient algorithm for Lagrangian relaxation. In *IEEE Conference on Decision and Control*, 1997.
- [8] 村上元一, 今泉 淳, 森戸 晋. ジョブの分岐のある2段階複数機械フローショップにおける納期遅れ最小化スケジューリング:ラグランジュ緩和に基づくヒューリスティックアプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'97 講演論文集, 1997.
- [9] 今泉 淳, 山越康裕, 村上元一, 森戸 晋. ジョブの分岐を伴う2工程並列機械フローショップスケジューリングへの分割アプローチ. オペレーションズ・リサーチ, Vol. 43, No. 11, pp. 624–631, 1998.
- [10] 今泉 淳, 森戸 晋. ジョブの分岐と重複生産を許す2工程並列機械フローショップスケジューリング問題:納期遅れ最小化に対するラグランジュ緩和に基づくヒューリスティックアプローチ. 生産スケジューリングシンポジウム'98 講演論文集, 1998.
- [11] 米田 清. ラグランジュ緩和法によるスケジューリング. システム/制御/情報, Vol. 41, No. 4, pp. 130–138, 1997.