競売のシミュレーションがラグランジュ緩和法

米田　清

1. はじめに

ラグランジュ緩和法（Lagrangian Relaxation）は多くのスケジューリング問題で実用になっている．これは一定の型の問題に対しては他の方法よりも有利だからである．本稿はその原理を説明する．

ある問題がラグランジュ緩和法で解ける型にはまっているかどうか．ないしは，型にはめることができるかどうか．これを直観的に，数式をいじったり数値実験をする前に判断できるようになることを目標に置く．最先端の論文や事例は，素直な型からは外れた問題を無理を承知で解いて見せるものが多く，参考になりにくい．

われわれは市場経済の中で生活している．そのため，意識しないでも市場経済の仕組みについては理解が備わっている．ラグランジュ緩和法の算法は競売のシミュレーションである．それがわかってしまえば，日常的な事をコンピュータ上で実行しているにすぎない．

競売は希少な資源を配分する仕組みであり，端的には競合を価格で解決する．一方，ラグランジュ緩和法は制約の違反を解消する仕組みであり，端的には制約違反をラグランジュ乗数で解決する．

上の２つの文では以下の語句が対応している．

競売	ラグランジュ緩和法
希少な資源を配分する	制約の違反を解消する
競合	制約違反
価格	ラグランジュ乗数

このように重要な語句を言い換えれば，概念も働きもきれいに対応がついてしまう．

ラグランジュ乗数と価格との対応は良く知られている．数理計画法の教科書にも「ラグランジュ乗数は帰属価値を表すので潜在価格とも呼ぶ」くらいの説明が大概は載っており，ミクロ経済学の教科書には，その現象的な意味が書いてある．

よねだ　きよし　福岡大学経済学部
〒814-0180 福岡市城南区七隈

2. 定式化

2.1 ジョブ

単純な例でラグランジュ緩和法の原理を説明する．

仕事ないしジョブは，原料を装置で加工して製品にすることである（普通は装置を機械と言う．すると機会と混同されやすい）．そのジョブが $J=3$ 個ある．

原料　○○○ → $\boxed{\text{装置}}$ → ○○○　製品

ジョブ $j=1, 2, 3$ は各々，原料 1, 2, 3 を装置で加工して製品 1, 2, 3 を作る．

ここで各ジョブには係員が１人ずつ，ついていると考える．これは情報用語で言えば，各ジョブをエージェントと考えるということである．つまり各ジョブは個別の意志を持って自律的に行動する．そこでジョブのことを人とみなしたりもする．

2.2 時間

多くのスケジューリング技法では時間を（連続な）実数として扱う．それに対してラグランジュ緩和法では普通，時間軸を互いに重なり合わない時間区間に区切って，自然数の番号を付けるという扱い方をする（時間を実数として扱っても同様の定式化はできる．そうすると，うまく解けないことが多い）．

時間 t の単位を，この例題では日にとる（実用ではよく 1/10 時間を単位にとる）．時間はこの単位の自然数で１日，２日，というように数える．例えば「ジョブ $j=1$，すなわち原料１を装置で加工して製品１を作るには，１日かかる」という具合である．1.3 日とかの整数でない時間単位かかるということは考えない（実用では，計算量を減らすために考えることがある）．$t=2$ は，２日目が始まった時刻から２日目が終わるまでの時刻に至る，時間の区間についた番号である．

2.3 納期

各ジョブには，各々の納期がある．例えばジョブ１の納期は今日から４日後で，ジョブ２は７日後だ，と

いう具合である．この例題ではわざと，全てのジョブが同一の納期を持ち，それは今日から4日後であるとする．このように意地悪く設定するのは，ラグランジュ緩和法がこの相互に矛盾する要求に，どう折り合いをつけるかを見るためである（もともと納期がうまくばらけていれば，何も工夫しなくてもスケジュールが立つ）．

ジョブが納期に遅れると，顧客に遅延違反金を払わねばならない．では早めに済ませておけば良いかと言うと，今度は在庫費用がかかる．早すぎ遅すぎのいずれにしても，納期からずれると納期違反料がかかる．そこでジョブの完工日は納期合わせにしたい．

ジョブ $[1,2,3]$ は加工に各々 $[1,1,2]$ 日かかる．

$a_j=$ ジョブ j の加工時間

$a=[\cdots,a_j,\cdots]=[1,1,2]$

としよう．1つしかない装置でこれを全てこなすとして，$\sum a_j=1+1+2=4$ 日間かかる．全てのジョブを納期の4日目から前倒しにしても1日目から始めれば4日目までには終わる．逆に，全てのジョブを後回しにしても4日目から始めれば7日目までには終わる．だからスケジュールの対象期間は1日目から $T=7$ 日目までを考えればよい．

納期より早すぎたり遅すぎたりするとどれだけの費用がかかるかはジョブ毎に異なる．

$c_j=$ ジョブ j の完工日；$c=[\cdots,c_j,\cdots]$

$f_j(c_j)=$ ジョブ j が完工日 c_j に完成するときの納期違反料

$F=[F_{jt}]=[f_j(t)]$

と書く．要するに F の第 j 行は，ジョブ j の納期違反金を完工日毎にならべたものである．具体的な数値は適当な単位（例えば100万円）で測って，

$$F=\begin{bmatrix}5&3&1&0&3&5&7\\6&4&2&0&3&6&9\\5&3&1&0&1&3&5\end{bmatrix}$$

としよう．$f_j,\ j=1,2,3$ を上から順に図1に示す．

各ジョブは各々の個別目的関数 $f_j(c_j)$ を最小化する $\min_{c_j} f_j(c_j)$ なる完工ができるように作業を行おうとする．それでは，全てのジョブからなる全体としては，どのようなスケジュールが望ましいだろうか．全体としては

$f(c)=$納期違反料の総和 $=\sum_j f_j(c_j)$

（例えば $f[4,5,3]=0+3+1=4$）を最小化したい．$f(c)$ をスケジューリングの目的関数に採用し，最小化 $\min_c f(c)$ する．

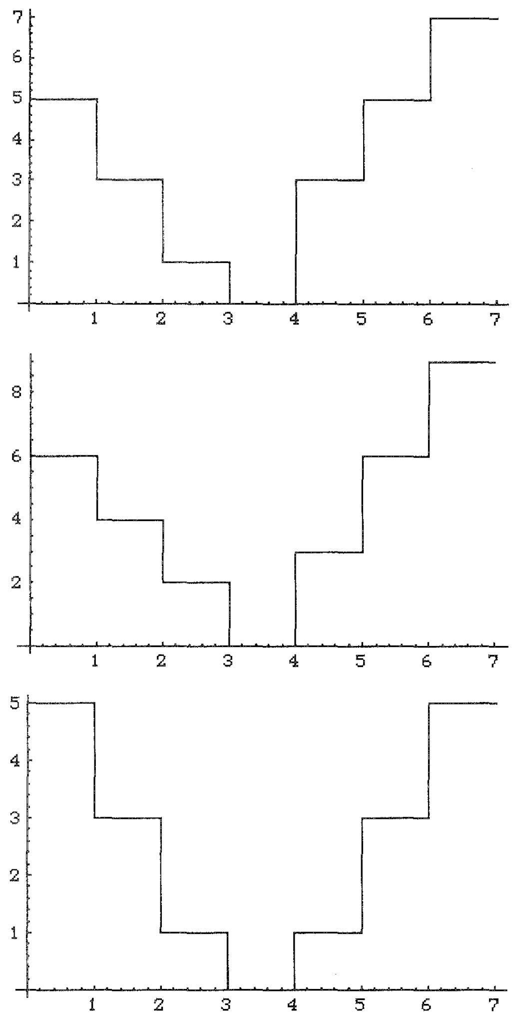

図1　ジョブ1, 2, 3の個別目的関数
横軸＝時間 t，縦軸＝納期違反料 $f_j(t)$

2.4　資源制約

全てのジョブ j は完工日を納期 $c_j=4$，つまり $c=[4,4,4]$ にしたいと思っている．これは加工装置がたくさんあれば簡単なことで，各自が作業を実行するまでのことである．ところが実際は装置が1つしかない．これが目的関数 f を最小化する上での制約条件である．

作業の実行状況は普通，ガントチャート（Gantt chart）で表す．制約条件を数式で表すため，このガントチャートを行列で表しておこう．

$$G(c)=G[4,4,4]=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

行がジョブ，列が時間に対応している．1が横に連なっている間が作業を行っている期間で，0は作業なし

を表す．例えばジョブ $j=3$ は $t=3,4$ 日に作業をする．

資源制約の違反の程度を

$$h_t(c)=\text{時間 } t \text{ における装置の不足台数} = \sum_j G(c)_{jt}-1$$

$$h(c)=[\cdots, h_t(c), \cdots]' \ (' \text{は転置})$$

で測る．単位は台である．例えば $c=[4,4,4]$ でガントチャートが上の場合なら

$$h(c)=[-1,-1,0,2,-1,-1,-1]'$$

負は装置が余っており，0はちょうどで，正は不足を表す．つまり $h\leq 0$ なら制約は満たされている．

上のように資源制約を破るスケジュールができるのは，各ジョブが自分が都合の良いときに装置を使えるとして予定を立てているからである．

2.5 最適化問題

結局，以上のスケジューリング問題を最適化に書き直したものは

$$\min_c \{f(c) | h(c)\leq 0\} \tag{1}$$

となる．

3. 競売とラグランジュ緩和法

3.1 装置使用価格

時間は $T=7$ 日間と，十分に取ってある．装置のやりくりさえすれば，損失を抑えながら，全てのジョブを片付けられる．それをどう実現するかについては，いろいろな考え方があり，その1つが競売である．

1つのものをたくさんの人が同時に使いたがっているのだから，いちばん欲しがっている人が使う．どれだけ欲しがっているかは，そのジョブ（の担当者）がある時間に装置を使う権利を得るために，いくら払うかによって測る．

$$u_t=\text{第 } t \text{ 日に装置を使う権利の価格}$$

$$u=[\cdots, u_t, \cdots] \ (0\leq u_t)$$

とする．非負条件 $0\leq u_t$ は「装置の使用者は金は払っても，金をもらうことはない」という意味である．この価格をうまく調整すれば，各日 t に装置を使うジョブの数 $\sum_j G_{jt}=h_t(c)+1$ を1つ以下（0か1）にできるだろうという見通しである．

経済モデルでは需要と供給の双方を価格の関数として表す．その場合，一般的には価格が変われば供給量も変わる．しかし，スケジューリングでは装置台数を固定として扱うので，供給が価格に関して硬直的である．したがって，価格で調整するのは装置の需要台数だけであり，供給はどの時間をとっても1台かぎりである．

3.2 ラグランジュ関数

装置使用料＝使用権の価格・不足台数 $=uh$ なので，完工日を c としたとき総費用は

$$l(c,u)=\text{納期違反料}+\text{装置使用料} = f(c)+uh(c) \tag{2}$$

である．$l(c,u)$ をラグランジュ関数，u をラグランジュ乗数と呼ぶ．

f は金額で測り，h は台数で測る．金額と台数とは，直接は足せない．それに対して上式は「台数で測った装置不足 h に装置を使う権利の価格 u をかけたものは，金額で測った納期違反料 f に足してもいい」と言っている．つまり価格 u は，制約違反の程度 h を単位変換して，目的関数 f と同一の単位に合わせている．

u にはもう1つ，納期違反料 f と装置不足 h の相対的な重要度を決めるという機能がある．

こうして尺度を統一して重要度を決めることによって定義した，新しい目的関数がラグランジュ関数 l である．f は制約条件を気にしていないのに対して，l は「制約違反もなるべく少なくしよう」という目的関数になっている．価格 u をうまく設定してラグランジュ関数 l を最小化すれば，制約条件 $h\leq 0$ を満たして，なおかつ目的関数 f を最小化するような解が得られるだろう，というもくろみである．

3.3 ラグランジュ緩和

このように制約条件付きの最適化問題(1)を，ラグランジュ乗数を使ってラグランジュ関数の制約なしの最適化問題(2)に置き換えることをラグランジュ緩和と言う．緩和とは，前者が「制約条件を満たせ」という，きつい定式化なのに対して，後者は「制約違反を減らせ」という，緩い定式化になっていることを指す．

3.4 分解可能性

価格 u が所与なら，完工日 c は総費用 l を最小化するように決めれば良い．ところでジョブ j の完工日 c_j を，他のジョブの完工日 $c_i, i\neq j$ を見ずに装置価格 u だけに依存して決めるとすれば $G(c)_{jt}=G(c_j)_{jt}$ と書ける．さらに

$$b_j=\text{ジョブ } j \text{ の着工日} = b_j(c_j)=c_j-a_j+1$$

とすれば

$$\begin{aligned}\min_c l(c,u) &= f(c)+uh(c)\\ &=\min_c\left\{\sum_j f_j(c_j)+\sum_{t=1}^{T} u_t\left[\sum_j G(c_j)_{jt}-1\right]\right\}\\ &=\sum_j \min_{c_j}\left\{f_j(c_j)+\sum_{t=b_j}^{c_j} u_t\right\}-\sum_1^T u_t\end{aligned}$$

$$=\sum_j \min_{c_j} l_j(c_j, u)-\sum u_t$$

となる．2行目から3行目が肝心である．面倒でも例題をあてはめて確かめると理解しやすい．

上の変形は $\min_c l(c, u)$ と $\sum_j \min_{c_j} l_j(c_j, u)$ とが最小化として同値であると主張している．この主張は分解可能性とか分離可能性と呼ばれ，ラグランジュ緩和法で最も重要な部分である．

分解可能性の意味は以下のとおり．価格 u が所与のとき総費用 l を最小化したい．それには，各ジョブ j が価格 u だけを参照し，他のジョブの都合は無視して，利己的に自分の費用 $l_j(c_j, u)$ のみを最小化するように完工日 c_j を決めれば良い．

つまり，分解可能性というのは，各個人の利己的な最適化 $\min_{c_j} l_j(c_j, u)$ が社会全体の最適化 $\min_c l(c, u)$ に直結するという構造である．この構造が，競売でうまく需要が調整できることを保証する．

変形前は $\min_c$ で，$\sum_j$ を含む複雑な関数である $l(c, u)$ を，ベクトル c を操作して最小化するということだった．しかるに min と $\sum_j$ とが入れ替わった後は $\min_{c_j}$ で，スカラー c_j を操作して簡単な関数 $l_j(c_j, u)$ を最小化しておいて，後で足せば良いことになっている．ベクトル c を操作する最小化より，スカラー c_j を操作する最小化の方が，格段に易しい．社会全体の都合を考えて行動するより，利己的に行動する方が，格段に易しい．

4. 競売の実行

4.1 第0価格案

価格の初期値として

$$u=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

を採る．いつ装置を使っても無料である．すると $l(c, u)=f(c)$ だから，各ジョブは納期違反料だけを払えば良い．

$$L=[L_{jt}]$$
$$L_{jt}= \text{ジョブ } j \text{ が } t=c_j \text{ としたときの } l_j$$
$$=l_j(t, u)$$

とする．この場合は $L_{31}=\infty$（ジョブ3は加工に $a_3=2$ 日かかるから）以外は $L_{jt}=F_{jt}$ となる．よって最適な完工日は $c[4, 4, 4]$ で，対応するガントチャートは先にも示した $G[4, 4, 4]$．このとき総費用は

$$\underline{l}=l(c=[4, 4, 4], u=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])$$
$$=L_{14}+L_{24}+L_{34}=F_{14}+F_{24}+F_{34}=0$$

である．

4.2 実行可能化

このガントチャート $G[4, 4, 4]$ をむりやり実行可能に直す．それには制約違反を起こしているジョブを後回しにすれば良い．まず，ジョブ1を1日，後回しする．これでジョブ1は実行可能になる．次にジョブ2を2日，後回しする．これでジョブ2と，同時にジョブ3が実行可能になる．こうして実行可能にしたガントチャートは

$$\overline{G[4, 4, 4]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=G[5, 6, 4]$$

となる．このとき総費用は

$$\overline{l}=l(c=[5, 6, 4], u=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0])$$
$$=L_{15}+L_{26}+L_{34}=3+6+0=9$$

である．

4.3 双対問題と双対ギャップ

$G[4, 4, 4]$ は容量制約違反を起こしている甘いスケジュールであり，総費用は $\underline{l}=0$ である．それを実行可能化した $G[5, 6, 4]$ は制約を満たしてはいるけれど最適には遠く，総費用は $\overline{l}=9$ である．したがって，最適スケジュールの総費用は0から9までの，どこかにある．

このようにして，実行不可能なガントチャートと，それを後回しによって実行可能化したガントチャートとが与えられたら，総費用の下界 $\underline{l}$ と上界 $\overline{l}$ とが計算でき，最適なガントチャートに対応する総費用はその間にある．

上界と下界の差 $\overline{l}-\underline{l}$ を双対ギャップと言う．これが大きければ実行可能スケジュール $\overline{G(c)}$ は最適解に遠く，小さければ近いことがわかるので，重要な情報である．

ここまでは，装置を使うと費用が発生する，ジョブの立場で問題を考えて来た．ここで，各ジョブから納期違反料と装置使用料，すなわち $l_j(c_j, u)$ を集める集金エージェントを作ろう．すなわち今までの金を払う立場から翻って，逆の受け取る立場で問題を考える．集金者は利己的に自分の収入を最大化するように行動する．集金者に操作できるのは価格 u である．これは数学的には最適化で主問題 $\min_c l(c, u)$ に対して双対問題 $\max_u l(c, u)$ を考えることに当たる．

集金者は需要と供給の差を見て，収入が増えるように価格を設定する．もし，ある時間に装置を使いたい

ジョブが複数あれば，その時間の装置使用料を値上げする．逆に，もしある時間に装置を使いたいジョブがなければ，その時間の装置使用料を値下げする．ただし，只より安くはしない($0 \leq u$).

価格がうまく設定された状態では，装置に対する競合が解消されている．つまり，ある時間に装置を使うジョブの数が0か1に絞られている．

装置を使うジョブの数が0なら，装置をその時間に使用する権利の価格は0である．誰も使いたくないものの値段は只なので．

装置を使うジョブの数が1のとき，その時間に装置を使用する権利の価格は適正である．なぜなら，価格を上げれば，その時間からジョブが逃げてしまう．逆に価格を下げれば，その時間に装置を使いたいジョブが複数になってしまう．

再び双対ギャップ $\overline{l}-\underline{l}$ の意味を考えよう．現在の価格設定における主問題の現状値が上界 $\overline{l}$，双対問題の現状値が下界 $\underline{l}$ である．上界 $\overline{l}$ は需要者であるジョブたちが，現状の価格のもとで総費用をどれだけ払ってもしかたがないと思っているかを表す．下界 $\underline{l}$ は供給者，すなわち集金者が，そのうちのどれだけを実際に収入として得ているかを表す．よって双対ギャップは，需要者が価格設定の変更によって支出を減らす余地の，限度額を示している．同様に双対ギャップは，供給者が価格設定の変更によって収入を増やす余地の，限度額を示している．

結局，双対ギャップは，価格設定の不適切さに由来する需給の乖離を測っている．

4.4 第1価格案

ここで装置不足台数 h を調べると，$t=4$ で競合が起こっている．そこで，集金者は例えば $u_4=3$ に設定する．

$$u=[0,0,0,3,0,0,0]$$

今度は装置価格が0ではない日があるので，$L_{jt}=l_j(t,u)$ を計算して並べると，

$$L=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 3 & 6 & 9 \\ \infty & 3 & 1 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

となる．ジョブ $j=3$ の $t=1$ 日目が $L_{31}=\infty$ となっているのは，作業が2日かかって1日では終わらないため，$c_1=1$ にできないからである．

これによると最適な完工日は $c=[3,3,3]$ で，今度は3日に集中してしまう．

$$\overline{G[3,3,3]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=G[4,5,3]$$

で，$[\underline{l},\overline{l}]=[1,4]$ となり，$u=[0,0,0,0,0,0,0]$ の時よりも良いスケジュールが得られている．

4.5 第2価格案

第0価格案では $t=4$ だった競合日が第1価格案では $t=3$ に移った．そこで集金者は，今度は $t=3$ に価格を立てる．例えば

$$u=[0,0,2,3,0,0,0]$$

とすると，

$$L=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 3 & 6 & 9 \\ \infty & 3 & 3 & 5 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

である．こうなると費用が等しくなる完工日がたくさんあって，この価格のもとでの最適完工日は一意に定まらない．$c=[2,4,2]$ でも $c=[3,4,5]$ でも総費用 l は同じである．早い完工日を優先するなら，解は $c=[2,4,2]$ で，

$$\overline{G[2,4,2]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=G[3,4,2]$$

である．

ここで上下界を調べると $[\underline{l},\overline{l}]=[4,4]$ となり，実行可能なスケジュールの品質は第1価格案と同じで，改善されていない．しかし，双対ギャップが $\overline{l}-\underline{l}=0$ であることがわかった．つまり，これで最適なスケジュールが得られていることが判明した．よって問題は解けた．上の $G[3,4,2]$ が最適解の1つである．

5. おわりに

価格の調整だけでは実行可能解が得られていない．良い線までは行くものの，最後の所はガントチャートをむりやり実行可能に直すヒューリスティクスに頼っている．実行可能解の存在は，実行できなかった作業はいくらでも後回しにできる，という逃げ道で保証している．

このヒューリスティクスの良し悪しが，得られるスケジュールの質に影響する．あまり複雑なことはせずに，バグがないことと，実行時間がジョブ数 J のオーダー $O(J)$ と短いことを主眼にするとまちがいが少ない．

最適解は一意でなかった．最適解の周辺は鍋底にな

っていて，どの解を採っても同じような品質である．解の品質は双対ギャップで見当がつく．実用的には最適性にこだわらないで良い．

例題では価格を2回，値上げしただけで最適解に到達した．実は1回だけの値上げで，既に最適解に到達していたのだけれど，それが判明しなかった．神経質に価格を最適化しないでも，実用的な解が得られる場合は多い．

価格を適正に設定するのは難しい．大きい問題では価格を上げたり下げたり，いろいろな探索をする必要が生じる．ラグランジュ緩和法の論文の多くは，この探索法に関する工夫を扱っている．

価格改訂をどのようにするべきかの最大の手がかりは $[\cdots, \partial l(c, u)/\partial u_t, \cdots]' = h(c)$ すなわち装置の不足台数だった．これを勾配でなく劣勾配と言う．関数 $l[c(u), u]$ は価格 u の関数として多面体で，一般には微分可能でないからである．劣勾配を手がかりに価格を改訂する算法を劣勾配法と呼ぶ．

ラグランジュ緩和法が高速なのは，双対問題で勾配情報を使うからである．主問題は組み合わせ最適化の問題なので，勾配の概念はない．しかし双対問題では，曲がりなりにも勾配情報が使える．それに対して，例えばメタヒューリスティクスでは主問題だけを扱い，利用するのは目的関数の値だけである．

どんな問題でうまく行くかについては，分解可能性が鍵である．個人が利己的に行動すると社会が良くなるという構図が成り立てば良い．そのための条件の1つは，各人が個性を持っていることである．全ての人が同じように行動すれば，競合は解消しない．諦める人があり執着する人があって，初めて競売が機能する．

個性は個別目的関数 f_j の違いである．もしも多くの個別関数が同一になるような問題を扱う必要があるなら，無理にも僅かな違いを導入する．

参考文献

[1] Zhang, Y., Luh P. B., Yoneda, K., Kano, T., Kyoya, Y.: "Mixed-model Assembly Line Scheduling Using the Lagrangian Relaxation Technique", IIE Transactions 32(2): 125-134, (2000)
(分解可能性の満たし方，価格の新しい設定法，ジョブに個性を与える方法など.)

[2] 米田　清：ラグランジュ緩和法によるスケジューリング；システム/制御/情報 41(4)；130-138, (1996).
(本稿より多少，詳しい解説．細かい誤りが多い.)