# クレジット・リスクと クレジット・デフォルト・スワップの評価モデル

青沼　君明

企業が発行する債券や株式には，その企業が倒産した時には投資資金が回収できなくなるというデフォルト・リスク（クレジット・リスク）が含まれている．本稿では，まず社債に含まれるデフォルト・リスクの量を計測するモデルについて述べ，次にデフォルト率をハザード・プロセスで表すモデルについて検討する．そして，こうしたデフォルト・リスクをヘッジするための商品である，クレジット・デフォルト・スワップの評価モデルを示す．

## 1. クレジット・リスク

クレジット・リスクとは，保有債権の対象となる企業が倒産（デフォルト），もしくは倒産の可能性が増大することにより被る損失リスクのことである．企業が発行する債券は，このクレジット・リスクのために，国債よりも高い利回りとなるのが一般的である．

金利の期間構造とは，現時点から将来の異なる期間に適用される金利水準を表したものであり，その関係を示したものがスポット・イールドカーブと呼ばれるものである．またイールド・スプレッドとは，一般には，倒産の可能性のある企業の発行する債券の利回りと，倒産の可能性が無いと考えられる国債の利回りの差のことである．そこには倒産した場合の損失リスク，社債の方が国債と比較して市場で売買される量が少ないことに起因する流動性リスクなどが含まれている．

### 1.1 金利の期間構造

金利は，金融・財政などの政策要因，経済状態などの外部要因環境，資金需要などの内部要因などが複雑に絡み合って決定され，期間との間には何らかの関係がある．それを示したものが金利の期間構造である．

代表的な金利として国債の利回りがあり，これは現時点で国債に投資した場合の期待収益率を示している．この国債の利回りを無リスク金利と定義することが多いが，これは将来のクーポンや元本が必ず回収できることを前提にしたものである．

ここで，割引債と利付債について簡単に説明する．割引債（ゼロクーポン債）とは，満期までの間にクーポンの支払いが無い債券のことであり，スポット・レートとはこの割引債の利回りを意味している．期間が $T$ 年，元本が100の割引債があり，現在の市場価格が $Z(0, T)$ であるとすると，半年複利で考えた場合のこの割引債の利回り $r$ は

$$Z(0, T)=\frac{100}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T}} \tag{1.1}$$

を満たす値として計算される．同様に，満期までの間に $n$ 回のクーポン $c_i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ の支払いがあり，それは時点 $t_i\,(T=t_n)$ でなされるとした場合の利付債の利回り $\tilde{r}$ は，その現在の市場価格を $\tilde{Z}(0, T)$ とすると

$$\tilde{Z}(0, T)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{\left(1+\frac{\tilde{r}}{2}\right)^{2t_i}}+\frac{100}{\left(1+\frac{\tilde{r}}{2}\right)^{2t_n}} \tag{1.2}$$

で与えられる．

金利を説明するモデルでは，数学的な表記のし易さから，金利を連続複利として取り扱うことが多い．すなわち，現在の市場価格が $S$，運用期間が $T$ である資産に投資するとき，金利を半年複利 $r$ で運用した場合も，連続複利 $\hat{r}$ で運用した場合も，将来の価値は同等であると考える．

$$S\cdot\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T}=S\cdot e^{\hat{r}T}$$

この連続複利で考えた場合には，(1.1)式の割引債の価格は

$$Z(0, T)=100\times\tilde{E}\left[e^{-\int_0^T \hat{r}(\nu)d\nu}\right] \tag{1.3}$$

で表される．なお，$\tilde{E}$ は現時点までの履歴が与えられたときの，リスク中立確率[1]に関する条件付き期待

あおぬま　きみあき
東京三菱銀行 商品開発部
〒100-8388 東京都千代田区丸の内2-7-1

[1] (1.3)式で計算される $Z(0, T)$ の値が，割引債の市場価格に一致するように計算される確率．

値を表している．

### 1.2　クレジット・リスクとイールド・スプレッド

企業が債務を履行できなくなる状態に陥ることを倒産（デフォルト）と呼び，ある企業がデフォルトした場合に，その企業の債権を保有することにより損失を被る可能性をクレジット・リスクと呼んでいる．また，企業が実際にデフォルトする場合だけでなく，企業業績や資金繰りの悪化などによる信用力低下により，保有している債券価格の下落や流動性の低下などによって損失を被る可能性もある．これが広義のクレジット・リスクと呼ばれるものである．

クレジット・リスクは債務の返済能力に関連するリスクであり，個別企業が発行する社債の利回りが国債の利回りより高いのは，このクレジット・リスクや流動性リスクなどが組み合わさって価格が形成されているためと考えることができる．

金融商品の価格は，概念的には現在および将来にわたってその資産がもたらす全てのペイオフ（キャッシュフロー）を，無リスクのスポット・レートによって現在価値に割引いたものを合計し，リスク中立確率に関する条件付期待値を取ったものとして計算される．

ここで，割引債を発行している企業が，満期までの間にデフォルトした場合には$\delta\,(0\leq\delta\leq 1)$を，デフォルトしなかった場合には1を，それぞれ満期$T$で受け取れるリスクのある割引債について考える．デフォルトの時点を$\tau$とし，現時点での期待値を$E$で表し，デフォルトの発生時点とスポット・レートの変動は独立であると仮定する．このとき，無リスクの割引債の利回りを$r$とすると，現時点でのこのリスクのある割引債の価格$P(0, T)$は

$$
\begin{aligned}
P(0, T) &= E\left[\frac{\delta}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T}}\cdot 1_{\{\tau\leq T\}} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T}}\cdot 1_{\{\tau> T\}}\right] \\
&= Z(0, T)\cdot E[\delta\cdot 1_{\{\tau\leq T\}} + 1_{\{\tau> T\}}] \\
&= Z(0, T)\cdot[\delta+(1-\delta)\cdot\tilde{P}\{\tau> T\}] \quad (1.4)
\end{aligned}
$$

で与えられる．なお，$1_{\{\tau\leq T\}}$は，$\tau$が$T$より短い，すなわち満期までの間にデフォルトした場合に1の値を返し，そうでない場合に0を返す定義関数であり，$\tilde{P}\{\tau> T\}$は満期$T$でこの企業が存続しているリスク中立な確率を表している．

ここで，先の連続複利を用いてイールド・スプレッドをより一般的な形で説明する．時点$t$における，ある企業$j$の発行する満期$T$の社債の市場価格を$P_j(t, T)$とする．この社債の利回り$Y_j(t, T)$は，

$$
Y_j(t, T) = -\frac{1}{T-t}\log P_j(t, T) \quad (1.5)
$$

で表される．この利回りは，クレジット・リスク以外にも流動性リスクや資金需要の有無などによる上乗せ分などを反映していると考えられるが，ここではクレジット・リスクのみの影響を想定し，クレジット・リスクが大きい（信用力が低い）企業ほど，イールド・スプレッドが高くなると想定する．

この社債の，デフォルトの可能性が無い（デフォルト・フリー）場合の価値を$Z(t, T)$とし，この利回りを$Y_0(t, T)$とすると，

$$
Y_0(t, T) = -\frac{1}{T-t}\log Z(t, T) \quad (1.6)
$$

となる．イールド・スプレッド$y_j(t, T)$とは，クレジット・リスクのある社債の利回りとデフォルト・リスクの無い債券の利回り格差であるから，

$$
\begin{aligned}
y_j(t, T) &= Y_j(t, T) - Y_0(t, T) \\
&= -\frac{1}{T-t}\log\frac{P_j(t, T)}{Z(t, T)} \quad (1.7)
\end{aligned}
$$

で計算される．

### 1.3　金融商品の価格付け

リスク中立確率におけるデフォルト・フリーのスポット・レートを$r(t)$とする．金融商品の価格は，現在および将来にわたってその資産がもたらす全てのペイオフをスポット・レートによって現在価値に割引き，リスク中立確率に関する条件付き期待値として計算される．

ここで，満期$T$までにデフォルトしなかった場合には満期時点で元本1を回収でき，現在時点から満期$T$までの間にデフォルトした場合には元本に回収率$\delta(\tau)$を掛け合わせたものがデフォルト時点$\tau$で回収できる割引債があるとする．満期$T$までにデフォルトしているかどうかについては，

$$
1_{\{\tau\leq T\}} = \begin{cases} 1 & \tau\leq T \\ 0 & \tau> T \end{cases} \quad (1.8)
$$

という定義関数を用いると，満期までにデフォルトしたとき$(\tau\leq T)$には1，デフォルトしなかったとき$(\tau> T)$には0という値が与えられる．この割引債の時点における価格$P(t, T)$は

$$
P(t, T) = \tilde{E}_t\Big[e^{-\int_t^{\tau} r(\nu)d\nu}1\cdot\delta(\tau)\cdot 1_{\{\tau\leq T\}}
$$

$$+e^{-\int_t^T r(\nu)d\nu}1\cdot 1_{\{\tau>T\}}\Big|\tau\geq t\Big] \tag{1.9}$$

で与えられる．ここで$\tau$はデフォルトの時点を表す確率変数であり，$\tilde{E}_t$は時点$t$までの履歴が与えられたときのリスク中立確率に関する条件付き期待値を表し，条件$\{\tau\geq t\}$は時点$t$までにデフォルトが発生していないことを意味している．

満期が$T$であるデフォルト・フリーな割引債の現在時点$t$での価格$Z(t, T)$を

$$Z(t, T)=\tilde{E}_t\Big[e^{-\int_t^T r(\nu)d\nu}\Big] \tag{1.10}$$

で表し，さらに，

①リスク中立確率に関して，デフォルトの発生とスポット・レート過程は独立である．

②回収率は，どの時点でデフォルトしても一定である$(\delta(t)=\delta)$.

③デフォルトした場合の回収額$(=1\cdot\delta)$は，デフォルト時点$\tau$ではなく，満期時点$T$で受け取ることができる．もしくは，その回収額$(=1\cdot\delta)$のデフォルト時点$\tau$における現在価値$e^{-\int_t^T r(\nu)d\nu}1\cdot\delta(\tau)$に相当する金額を，デフォルト時点$\tau$で受け取れる．

という3つの仮定を置くと，(1.9)式は

$$\begin{aligned}P(t, T)&=\tilde{E}_t\Big[e^{-\int_t^T r(\nu)d\nu}\Big]\\&\quad\cdot\tilde{E}_t[\delta\cdot 1_{\{\tau\leq T\}}+1\cdot 1_{\{\tau>T\}}|\tau\geq t]\\&=Z(t, T)[\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau>T\}]\end{aligned} \tag{1.11}$$

となる．なお，$\tilde{P}_t$は時点$t$における条件付きリスク中立確率であり，(1.7)式に(1.11)式を当てはめると，

$$y_j(t, T)=-\frac{1}{T-t}\log[\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t\{\tau>T\}]$$

であるので

$$e^{-y_j(t,T)(T-t)}=\delta+(1-\delta)\tilde{P}_t[\tau>T]$$

$$\tilde{P}_t[\tau>T]=\frac{e^{-y_j(t,T)(T-t)}-\delta}{1-\delta} \tag{1.12}$$

が得られる．

### 1.4 Duffie and Singleton モデル

Duffie and Singleton[3]は，デフォルト・リスクのある割引債の価格$P(t, T)$を(1.13)式で表した．

$$P(t, T)=\tilde{E}\Big[e^{-\int_t^T R(s)ds}1\Big|\mathrm{F}_t\Big] \tag{1.13}$$

$$R(s)=r(s)+(1-\delta)h(s)$$

ただし，$r(s)$は無リスク金利，$\delta$は回収率，$h(s)$はハザード・レートであり，時点$t$の直前まで存続していた企業が，時点$t$でデフォルトする確率を表したものである．

$$h(t)=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}P\{\tau\geq s\}|_{s=t}}{P\{\tau\geq t\}} \tag{1.14}$$

このモデルには，デフォルト確率を表すハザード・レート$h(t)$と，無リスク短期金利$r(t)$に関する2つのプロセスがある．ここで，$h(t)$と$r(t)$が独立，すなわちデフォルト率の変化はイールド・カーブの変化の影響を受けないと仮定し，(1.13)式に(1.10)式を代入すると，

$$P(t, T)=Z(t, T)\cdot\tilde{E}\Big[e^{-\int_t^T(1-\delta)h(s)ds}1\Big|\mathrm{F}_t\Big] \tag{1.15}$$

となる．このときイールド・スプレッド$y(t, T)$は

$$e^{-y(t,T)(T-t)}=\tilde{E}\Big[e^{-\int_t^T(1-\delta)h(s)ds}1\Big|\mathrm{F}_t\Big] \tag{1.16}$$

で計算される．

## 2. ハザード・プロセス

Duffie and Singletonのモデルでは，イールド・スプレッドが回収率$\delta$とハザード・レート$h(t)$の関数になっていた．したがって，回収率$\delta$を過去データから算出するなどの方法で決定すれば，イールド・スプレッドの期間構造を説明するにはハザード・レートの推定が残された課題となる．ハザード・レートを説明する方法の一つに確率微分方程式でハザード・プロセスを記述する方法がある．ここでは，Gaussianタイプと Vasicekタイプを用いた場合のイールド・スプレッドの式を示す．

### 2.1 Gaussian タイプのハザード・プロセス

ハザード・レートが

$$dh(t)=\mu(t)dt+\sigma dw_t,\quad h(0)=h_0 \tag{2.1}$$

に従うGaussianタイプのモデルを適用する．ただし，$w_t$は標準ブラウン運動，$\mu(t)$は時間変化するドリフト，$\sigma$は標準偏差である．この場合の，時点$t$での満期$T$の債券のクレジット・スプレッド$y(t, T)$は

$$\begin{aligned}e^{-y(t,T)(T-t)}=\exp\Big(-\Big(&h(t)(T-t)+\\&\int_t^T(T-t)\mu(s)ds\Big)(1-\delta)\\&+\frac{1}{6}(1-\delta)^2\sigma^2(T-t)^3\Big)\end{aligned} \tag{2.2}$$

で与えられる（Davis and Marvoidis[2]）．

### 2.2 Vasicek タイプのハザード・プロセス

ここで，ハザード・レートに平均回帰性を持たせるために，Vasicekタイプのハザード・プロセスを適用する．

$$dh(t)=c(m-h(t))dt+\sigma dw_t,\quad h(0)=h_0 \tag{2.3}$$

なお，$c$ は平均への回帰スピード，$m$ は平均的なハザード・レートである．このプロセスを仮定した場合の時点 $t$ での満期 $T$ の債券のクレジット・スプレッド $y(t, T)$ は

$$e^{-y(t,T)(T-t)}=\exp\Big[\frac{1}{c}(e^{-c(T-t)}-1)\Big((1-\delta)(h(t)-m)-\frac{\sigma^2}{4c^2}(1-\delta)^2(e^{-c(T-t)}-3)\Big)-(T-t)\Big((1-\delta)m-\frac{\sigma^2}{2c^2}(1-\delta)^2\Big)\Big] \tag{2.4}$$

で与えられる（Aonuma and Nakagawa[1]）．

## 3．クレジット・デフォルト・スワップの評価

企業の発行する債券には，その企業が倒産するかもしれないリスクが含まれていた．そのリスクをヘッジするための商品がクレジット・デリバティブであり，ここではクレジット・デリバティブの基本である，クレジット・デフォルト・スワップを例に取り上げ，そのキャッシュフローを評価するためのモデルについて説明する（Aonuma and Nakagawa[1]）．

### 3.1 クレジット・デフォルト・スワップの定義

クレジット・デフォルト・スワップのごく単純な例としては，ある企業の債券を保有するA社が，その債券のデフォルト・リスクをヘッジしたいと考えたときに利用するスワップ契約があげられる．A社はB社に対し，デフォルトが発生するまで，もしくはスワップの契約期間が終了するまで，保険料に相当する固定のプレミアム $c_i$ を定期的に支払い，一方のB社は，デフォルトがスワップ期間終了前に生じた場合には，参照資産となった債券の回収不能分 $(1-\delta)$ に相当する額を，次のクーポン支払日時点でA企業に支払うという契約である．この取引のA社の立場をプロテクションの買手（Fixedサイド）と呼び，B社の立場をプロテクションの売手（Recoveryサイド）と呼ぶ．

### 3.2 クレジット・デフォルト・スワップのキャッシュフローの評価

クレジット・デフォルト・スワップの評価では，プロテクションの買手とプロテクションの売手の価値が均衡するプレミアム $c_i$ を計算することになる．図3.1に示したクレジット・デフォルト・スワップの例は参照資産が1つの場合であるが，実際には参照資産が複数ある（バスケット）場合があり，このときには

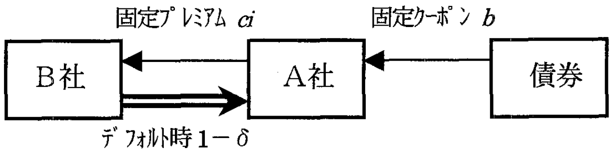

図3.1 クレジット・デフォルト・スワップ

参照資産間の最初のデフォルト時間（first-default-time）が問題[2]となる．また，A社の立場に立てば，B社が契約の満期以前にデフォルトした場合，クレジット・デフォルト・スワップの契約が清算されることから，デフォルトが起きたときの損失補償を受ける権利が失われることになる．それを補うためには，同様のクレジット・デフォルト・スワップを別な企業と再契約する必要があるが，この時点では以前の契約と同じような条件で契約できるかどうか分からず，再構築コストが発生することになる．また，クレジット・デフォルト・スワップでは，参照資産がデフォルトした場合のプロテクションの買手が受けられる保証は，それから3週間後というようにタイム・ラグが設定されているのが一般的である．したがって，このタイムラグの間に，保証をしてくれるはずのプロテクションの売手がデフォルトしてしまった場合，プロテクションの買手は保証されるべき金額の全てを失う可能性がある．A社から見たB社をカウンターパーティ（counter party）と呼ぶが，クレジット・デフォルト・スワップでは，こうした相手先がデフォルトするリスク（カウンターパーティ・リスク）を考慮する必要がある．ここでは，参照資産が1つであり，カウンターパーティ・リスクがない場合のごく単純なクレジット・デフォルト・スワップの評価モデルについて検討する．

(1) プロテクションの買手サイド

フィルトレーション付きの確率空間を $(\Omega, \mathrm{F}, \{\mathrm{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ で表す．満期が $T$ であり，$n$ 回の利払日 $t_i\ (0<t_1<\cdots<t_n<T)$ 毎にデフォルトの保険料に相当する固定プレミアム $c_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$ が支払われるクレジット・デフォルト・スワップが契約されているとする．クレジット・デフォルト・スワップでは，デフォルトが発生した時点 $\tau$ で契約が終了するので，プロテクションの買手サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 $P_F$ は，$t_i<\tau$ 時点までのク

[2] 2番目のデフォルトまでを対象とした，Second-defaultの商品もある．

ーポン $c_i$ を割引いたものの合計になる．

$$P_F=E\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\exp\left(-\int_0^{t_i}r(\nu)\,d\nu\right)1_{\{t_i<\tau\}}\right]$$

ここで，スポットレート・プロセス $r(t)$ とハザード・プロセス $h(t)$ は独立であると仮定すると，

$$\begin{aligned}P_F&=\sum_{i=1}^{n}Z(0,t_i)c_iP[\tau>t_i]\\&=\sum_{i=1}^{n}Z(0,t_i)c_iE\left[e^{-\int_0^{t_i}h(s)ds}\right]\end{aligned}\qquad(3.1)$$

が得られる．

(2) プロテクションの売手サイド

もし，債券発行企業がデフォルトした場合，B社はその債券の回収不能分だけA社に対して支払義務が生ずる．$B(t)$ を，このクレジット・デフォルト・スワップの対象となった原債券の $t$ 時点での価値であるとし，この債券の発行企業がデフォルトした場合には，デフォルトが起こる直前の債券価格 $B(\tau_-)$ に，回収率 $\delta\,(0<\delta\leq1)$ を掛け合わせた $\delta B(\tau_-)$ がA社の回収可能額であるとする．この債券のクーポン支払い日を $u_j\,(0<u_1<u_2<\cdots<\tau)$ とし，$j$ 番目のクーポン支払い日 $u_j$ では $b_j$ のクーポンが受け取れるとする．また，デフォルトの発生が $u_{i-1}$ 時点から $u_i$ 時点の間に発生した場合には，B社はA社の回収不能分に相当する $1-\delta B(\tau_-)$ の保証を $u_i$ 時点で行わなければならないと仮定する．ただし，モデルの簡易化のために，デフォルト時点で確定した $1-\delta B(\tau_-)$ の保証に対し，デフォルト発生から $u_i$ 時点までの金利部分が加算された形で支払われるとする．

この場合，クレジット・デフォルト・スワップの対象となった原債券の時点 $t$ での価値 $B(t)$ は，各クーポン支払い日毎のキャッシュフローを評価すれば良い．したがって，満期 $T$ 時点 $(=u_n)$ では，元本とクーポンが合わさったキャッシュフローが $b_n$ として支払われるとすると，原債券の時点 $t$ での価値 $B(t)$ は

$$B(t)=E\left[\sum_{u_i>t}b_i\exp\left(-\int_t^{u_i}\{r_s+(1-\delta)h(s)\}ds\right)\middle|\mathrm{F}_t\right]$$

で計算される．

また，このプロテクションの売手サイドのクレジット・デフォルト・スワップの現在価値 $P_R$ は

$$P_R=E\left[\exp\left(-\int_0^{\tau}r_{(s)}ds\right)(1-\delta B(\tau_-))1_{\{\tau\leq T\}}\right]$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^T E\left[e^{-\int_0^t h(s)ds}h(t)\right]Z(0,t)dt\\&\quad-\delta\sum_{i=1}^{n}b_iZ(0,u_i)\int_0^{T\wedge u_i}E\left[e^{-\int_0^t h(s)ds}h(t)\right.\\&\quad\left.\cdot E\left[e^{-\int_t^{u_i}h(s)ds(1-\delta)}\middle|\mathrm{F}_t\right]\right]dt\end{aligned}$$

となる（$T\wedge u_i$ は $\min(T,\ u_i)$ の意味である）．この式には，2つの期待値の計算が含まれているが，(2.2)式，(2.4)式で示したGaussianタイプやVasicekタイプのハザード・プロセスを仮定することにより，Recoveryサイドのデフォルト・スワップの現在価値 $P_R$ をクローズド・フォームで求めることができる（Aonuma and Nakagawa[1]）．

## 4．まとめ

本稿では，社債のイールド・スプレッドが，回収率 $\delta$ とハザード・レート $h(t)$ で説明されることを述べ，ハザード・レートの説明としてGaussianタイプとVasicekタイプのハザード・プロセスを用いた場合のイールド・スプレッドの推定モデルを示した．また，クレジット・デフォルト・スワップのキャッシュフローの評価方法について検討した．こうしたクレジット・リスクを計量化する手法の開発は，金融機関にとっては非常に重要なテーマとなっており，今後，パラメータの推定方法と合わせて多くの研究がなされていくと思われる．

### 参考文献


[1] Aonuma, K., Nakagawa, H., "Valuation of Credit Default Swap and Parameter Estimation for Vasicek-type Hazard Rate Model", *Working paper*, 1998.

[2] Davis, M., Marvoidis, T., "Valuation and Potential Exposure of Default Swaps", *Technical Note*, 1997.

[3] Duffie, D., Singleton, K., "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", *Working paper*, Stanford University, 1994.

[4] Kusuoka, S., *A remark on default risk models*, Advances in Mathematical Economics, volume 1, pp. 69-82 Springer-Verlag, 1999.