

金融に変革をもたらす大規模シミュレーション

鳥居 秀行

1. はじめに

近年、内外の先進的な金融機関において、社会科学的事象を数万から数十万次元規模のモンテカルロシミュレーションにより模倣し、リスク管理や経営リソースの配分に役立てる手法が普及しつつある。この種のテクノロジーは経済学的見地から解説されるのが通例であるが、非線形・多変量の確率論的事象モデル化の実際例として、その工学的側面も十分に興味深い。もちろん、熾烈な競争下にある産業研究の常として、詳細が公表されることは稀である。そこで本稿では、上位金融機関をユーザーとし、リスク管理シミュレーションシステムの開発者である弊社の経験をもとに、この方面の技術的発展について紹介したい。

2. 重要性増すリスク計量化技術

経済の中核をなす金融機関が破綻すれば、資金決済を通じて影響は連鎖的に拡大する。国際的な金融機関の破綻となれば、一国経済ばかりか国際金融システムの危機にまで発展しかねない。これが金融専門家の言うシステムリスク（有名な銀行破綻の事例から名をとりヘルシュタットリスクとも呼称される）である。システムリスクの発生を防止するためには、経営内容が悪化した金融機関を金融仲介市場から排除し、信用連鎖を断ち切らねばならない。また個々の金融機関においては、自己の経営体力に照らしてリスク過大になっていないか常に点検する必要がある。

この目的のため、各国の金融監督規制は段階的に強化されてきた。その代表例が1980年代末からG10各国において実施されたBIS（国際決済銀行）自己資本比率規制である。1990年代も、中南米危機、北欧通貨危機、ERM破綻、アジア危機、ロシア危機、米ヘッジファンドの破綻など、金融危機が相次いだ。民間

では規制強化にむしろ先行する形で精力的に研究に取り組んでおり、今日では国際的な金融機関の多くが数値シミュレーションを利用した確率論的リスク管理（VaR: Value at Risk）を日常的に行っている。

3. 非線形・超高次元の壁

より容易な問題である市場リスクのみの計量化ならばともかく、近年盛んな信用リスクまで含めたりリスク計量化の実現には、経済学的諸問題および不可知論的難題を別にしても以下のような工学的障害がある。

- ・リスク量は非線形特性を持つ確率論的事象。大数の法則や多変量正規分布を用いる簡易な統計処理では記述に限界がある。
- ・確率変数が非常に多い。大手金融機関を例にとれば、主要貸出先だけで数万社の企業を個別の確率変数として扱う必要がある。
- ・個別の取引件別に見れば数千万個から数百万個のキャッシュフローに分解される。大規模なデータ処理が不可欠である。

ここで、「リスク量の非線形性」とは、市場変動に内在するカオスの挙動、あるいは金融商品のオプション性のみを指すのではなく、顧客あるいは金融機関自身が金融取引を継続するか否かの選択可能性、外的要因、法務的なリスクまでをも含めた広範囲の影響の結果を指す。十分に精緻なモデル化を行った場合、典型的には次の確率密度分布関数（3期間の累積VaRを示したもの）のような非線形特性を観察できる（図1）。

この問題に対して真正面から取り組んだ場合の困難さ、特に計算量の膨大さは容易に想像できよう。そこで、現在のように計算コストが低下する以前は、簡易な解析式を組み立ててリスク量を求める以外に計算手段がなかった。これは、保険数学（アクチュアリー）の分野であり、契約者の死亡と企業の倒産を同一視してモデル化する。残念ながらこのような簡易手法では、現実に直面する次のような問題を解決できず、結果的

とりい ひでゆき
ニューメリカルテクノロジーズ(株)
〒113-0033 文京区本郷3-42-5

表1 金融モデルの登場年代と次元数

利用目的	変動要素数	登場年代	主な解法
単変量オプションモデル	1	～1980	解析式またはツリー（二分木）
多変量オプションモデル	2～3	1980年代	ツリーまたはモンテカルロ
イーロードカーブモデル	3	1980年代末	主成分分析+解析式
MBS, MBS デリバティブ	～30	1980年代後半	準モンテカルロなど
為替、金利 VaR	300～700	1994～	擬似乱数モンテカルロ
株式 VaR	3,000～	1997～	擬似乱数モンテカルロ
信用 VaR	10,000～	1997～	擬似乱数モンテカルロ

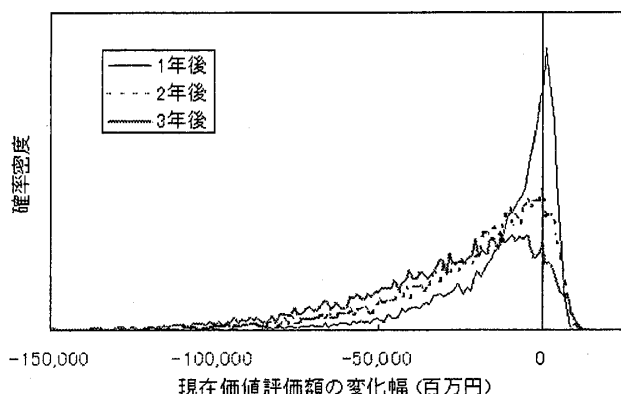


図1 信用リスク量の確率密度関数

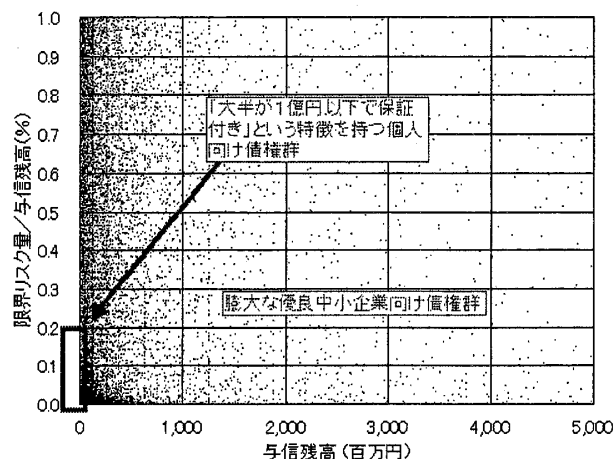


図2 典型的な商業銀行ポートフォリオの姿

にリスク量を過小評価することが今日では判明している。

- ・個々の統計サンプルに極端な大小がある。大きな与信量を持つ特定サンプルが全体に大きな影響力を及ぼすケースがある。
- ・個々の確率変数は単純な相関関係で記述できない。企業は個別の業績変動以外にも、倒産連鎖の形で他企業から影響を被りうる。産業構造や資本支配のモデル化が必要。
- ・時系列変化を伴う経路依存型モデル特有の困難さ。対象は変化する法制度や会計制度、あるいは経済状況に支配されており、適切なバイアス入力も時に必要となる。

不均等分布をイメージしやすくするために、現実の銀行を模倣した仮想ポートフォリオ（貸出先総数 50,000 社）を入力とする、信用 VaR システムからの計算出力を次に示す（図 2）。

図 2 では、X 軸が各統計サンプルの大きさ（与信額）、Y 軸が当該サンプルのポートフォリオ全体への限界リスク寄与度（与信分散効果）、各ドットが一つの与信先企業を示している。仮に図の各サンプルが同じ大きさ、すなわち X 軸方向に固まって分布していれば保険数学的手法を援用できる可能性がある。しかし現実には、特定の貸出先に大幅な与信集中があり、しかもそれが当該金融機関の行く末に関わるケースが

多い。

以上が今日、リスク管理分野においてシミュレーション手法が多用される理由となっている。

4. 計算量の克服

金融においては、多変量の確率変数を扱うニーズは多い（表 1）。「先端金融商品」として新しく紹介されるアイデアにしても、大半は 1970 年代あるいは 1980 年代遅くまでに幾多の実務家の手により開発し尽くされた結果であり、利が絡むゆえに一般にはもちろん、学界にさえ手法が公開されなかっただけのことである。それでもなお、費用対効果を重視する実社会のこと、ナンバーワン手法採用に至るには、工学および数学の成果を待たねばならなかった。数百次元超クラスの数値シミュレーションが一般化したのは、はるかに時代を下り 1990 年代に入ってからである。

今や、弊社製品の CreditBrowser を例にすれば、邦銀大手行の主要法人貸出先数に相当する取引件別数 150,000、債務者数（≡次元数）50,000、10,000 回の信用リスクシミュレーションを約 2 時間で計算する（4 CPU の Compaq AlphaServer 4100 上での計測値）。小規模金融機関が対象ならば 24 時間以内に 10 万回級の多期間シミュレーションを十分遂行しうる。

ハイエンドの計算サーバーを用意すれば、日本の全法人企業を入力してシミュレーションすることも技術的に不可能ではない。

5. 擬似乱数技術

数学からは、高次元シミュレーションに必要な高次元均等分布・超長周期乱数が手に入ったことが大きく寄与している。

モンテカルロシミュレーションの利用者にとって悩みは計算量とシミュレーション誤差である。原始的なモンテカルロ法 (Crude Monte Carlo) の理論性能 (= 計算誤差) は、シミュレーション回数を n とする次式に支配されており、回数を増やしても容易に精度は向上しない。

$$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1980年代末、まだ計算機が遅かった時代には超一様乱数列 (Low-Discrepancy Sequence: 以降、LDS) を使った準モンテカルロが金融界ではよく用いられた。規則性を持った数値列=LDS を使った準モンテカルロを用いれば、シミュレーション回数を n 、次元数を d として、理論性能は

$$O\left(\frac{(\log n)^d}{n}\right)$$

となり、単変量または低次元における、特に期待値や分散を求める用途において大きな効果を発揮する。例えば単変量のオプションプライシングには少ない繰り返し計算で絶大な精度向上の効果があり、1980年代後半の低速なコンピュータでも十分に実用に供したのである。このため、MBS/ABS ブームに乗って主要金融プレーヤーの間で流行した (大半は Faure 列あるいは Sobol 列の改変版)。現在も実質的に効く次元数 (あるいは主成分数) が比較的少ないと推測される市場 VaR の分野で準乱数の利用事例が多数ある。

ところが、LDS を使用する限り高次元下においては次元数 d が効き、著しく精度が劣化する。また、VaR 計算では分布の期待値近傍ではなく分布のテールが重要であるのに対して、テールにおける LDS の挙動はよく解明されておらず扱いづらい。モデルにより確率変数間の記述において LDS 間の系列相関が障害となり、結果が意味をなさなくなる。そこで1990年代の金融界では擬似乱数 (pseudo-random) が見直された。

ここで擬似乱数のリバイバルとともに問題になった

のが、モデルに要求される次元数増大とともに乱数周期を使い果たす危険である。モンテカルロシミュレーションは乱数を大量に消費する。典型的信用リスクモデルでは1企業に1個の乱数を割り当てる単純なモデルであっても10,000回、50,000社のシミュレーションを行えば 5×10^8 個の乱数が必要となる。これはC言語標準の rand 関数 (線形合同法) の乱数周期に匹敵する。モンテカルロシミュレーションを安全に行うには必要な乱数個数の3乗以上の乱数周期が必要との経験則に従うならば、大半の乱数生成法は不合格になってしまう。加えて、限界リスク量のように条件付き確率分布の計算も必要であり、高次元における均等分布性能が重要となってくる。

そこで、特殊なハードウェアに頼り、再現性のあるシミュレーションが出来ないという大きな欠点 (リスク管理モデルを設計する上では外部監査基準のクリアが難しく致命的) のある物理乱数を別にすれば、より良い擬似乱数を探さなければならない。これを解決した事例が、慶應義塾大学理工学部 (現在、九州大学) の松本助教授・西村拓士による擬似乱数 Mersenne Twister である。

Mersenne Twister は乱数周期 $2^{19937}-1$ という超長周期、高次元均等分布性を持ちながら非常に高速なアルゴリズムであり、金融リスクシミュレーションにも少なからぬ寄与をしている。

6. モーメントマッチング

高次元シミュレーションのもう一つの鍵は、モンテカルロ法の発生誤差を小さくし、少ない試行回数でも収束性を改善する技術である。

擬似乱数をそのまま用いる Crude Monte Carlo の収束性能は良くない。しかし、数学・統計学に詳しい者ばかりではない金融実務の世界では、ごく最近まであたり前のように Crude Monte Carlo が使われてきた。特に初期の VaR モデルの中には著名米銀の販売製品の中にすら、「良い乱数をとれるまでひたすら試行を繰り返す」という気の長い方法を採用したもののさえあった。これでは高次元シミュレーションなど望むべくもない。理解が進むにつれて必然的に、生成する擬似乱数を操作し、より望ましい確率分布に近づけようとする一連のモーメントマッチング手法が金融界でも普及した。特に、対称変量法と2次サンプリング法 (quadratic resampling) は広く用いられている。

この種の操作を行えばシミュレーション回数の多寡

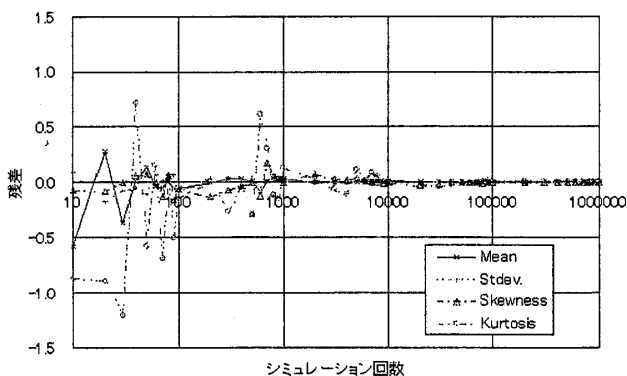


図3 原始的モンテカルロ法の収束状況

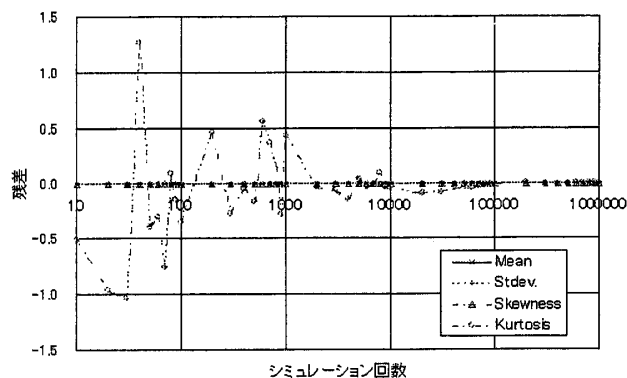


図4 モーメントマッチング使用による改善効果

に関係なく、平均 (1次モーメント)、標準偏差 (2次モーメント)、歪度 (skewness, 3次モーメント)、およびより高次の奇数モーメントを、入力データと完全に一致させることができる。次の図はシミュレーション回数を10回から1,000,000回まで変化させた時の1次から4次までの各モーメントの変化を、原始的なモンテカルロ法 (図3) と、対象変量法と2次サンプリング法併用によるモーメントマッチングの結果 (図4) の両方について示したものである。一見してわかる通りその効果は劇的である。

もちろん、急速な収束性改善が見られたからといって、真の解に必ず漸近することとはもちろん別問題であり、ある程度の計算試行は必要である。時々、「わずか100回のモンテカルロシミュレーションで完璧な答えが出た」といった誤った報告を今でも見かけることがあるが、これは典型的 Type I Error である。

とはいえ、こうしてようやく金融分野におけるモンテカルロシミュレーションも実用域に達した。もちろん、第一線の金融機関が使用する技術水準のモーメントマッチングでは、多変量シミュレーションで相関係数あるいは共分散も合致させたり、別の帰納的手法と組み合わせて各種の確率密度関数、例えば対数正規分

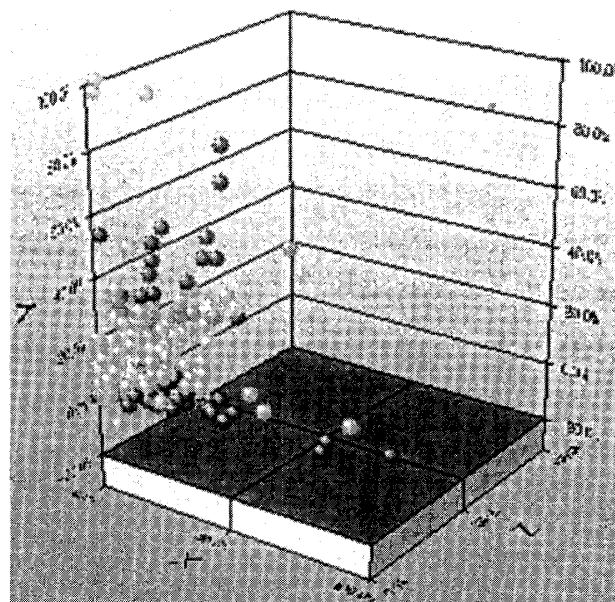


図5 リスクリターン3軸分析

布や二重指数分布族に合わせるなど、数々の応用事例がある。

なお、弊社では Mersenne Twister による多変量乱数、対称変量法、2次サンプリング手法などを Excel から使用できるアドインソフトウェア NtRand を無償提供している。ここにあげたサンプルも NtRand を使用して作成した。

詳しくは

<http://www.numtech.co.jp/documents/19981222/> をご参照頂きたい。

7. 金融モデルの新展開

さて、乱数技術に纏わる数学的複雑さ、工学的には計算量さえ克服してしまえば、シミュレーション技術の特性として後の応用は比較的容易である。金融界でもこれは例外ではなく、多彩な成果が花開きつつある (図5)。

金融モデルはますます多くの事象を取り込み、連続的な市場変動ばかりでなく、様々なイベント事象を織り込んだ長期保有シミュレーションまで可能となっている。比較的枯れた分野とみなされがちなオプションプライシングでさえその例には洩れない。

例えば、初歩的なオプションモデルや市場 VaR モデルが仮定する資産価値変動の確率密度分布は次の図のような対数正規型である (図6)。

しかし、経験豊富なマーケットディーラーであれば、この種の金融モデルが「平常時の市場」でしか機能せず、しばしば起こる「市場急変」にはまるで当てはま

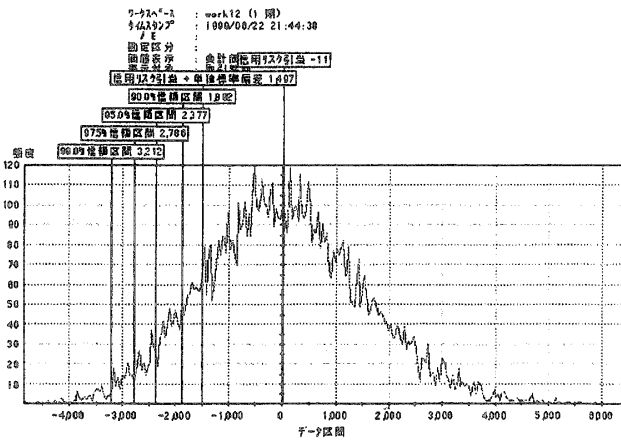


図6 一般的な市場 VaR モデル (7,000 資産の株式)

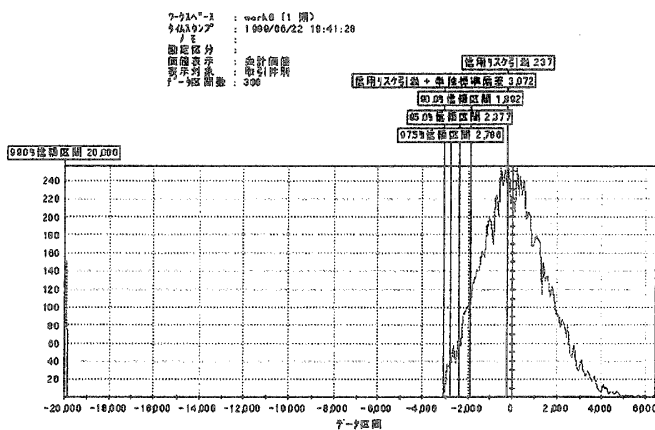


図7 イベント事象を組み込んだ市場 VaR モデル

らないことを知っている。現実のマーケットが仮定しているのは株式であれば次のような確率密度分布である (図7)。

この例は、現実世界の数値モデル化に至る道の険しさを示す事例であり、学者の理論は実用に耐えないと厳しく批判される好例であるが、現実的側面から眺めて欲しい。マーケットディーラーや金融機関は一見完全市場と思える状況下で多くの収益機会を(そしてリスクも)見出している。

現実に近いリスク・リターンを、コンピュータを使ってシミュレーションできるという事実は、ポートフォリオ最適化理論にも新たな見地を提供しうる (図8)。ポートフォリオ・インシュアランスが失敗に帰したことで一度は死んだとみなされたこの分野であるが、新しいテクニックを使つての多くの研究が待たれてい

テ-マ区間 : work 6 (1 期)
 時刻 : 1999/06/22 19:41:28
 決定区分 :
 価値表示 : 会計価値
 表示対象 : 債務者別

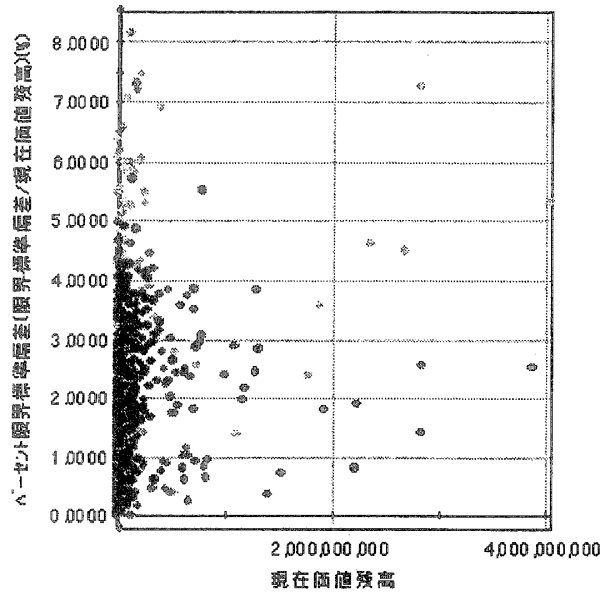


図8 株式ポートフォリオとリスク分散効果

る。

8. おわりに

従来は不可能と思われた規模の計算が可能となったとき、研究のブレークスルーが起こることは珍しくない。天体運動シミュレーションなど、コンピュータを利用した数値実験が近年盛んであるが、高度な並列処理実現、数値計算プログラミング技術、ハードウェア進歩のおかげで、社会科学である金融の分野もまた同様に発展しつつあるのである。

参考文献

- [1] Merton, R.: "On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates," J. of Finance, 29, 449-470, 1974.
- [2] J. P. Morgan and Co.: "CreditMetrics™—Technical document. The benchmark for understanding credit risk," 1997.
- [3] Matsumoto, M. and Kurita, Y.: "Twisted GFSR generators II," ACM Trans. On Modeling and Computer Simulation, 4, 254-266, 1994.