金利派生商品の時価評価と評価システム

白川　正樹

1. 背景

従来の日本の金融派生商品（デリバティブ）の会計基準は「発生主義」に基づいており、含み損益は決済時点まで損益認識されない。現行、時価評価額等は有価証券報告書に注記事項として開示しているのみである。一方、国際的な会計基準のトレンドは「時価主義」となっており、日本においても、企業会計審議会が1999年1月「金融商品に係る会計基準の設定に関する意見書」を公表、詳細は実務指針待ちであるものの、全事業会社へのデリバティブ時価会計の導入が確定した。これにより2000年4月以降に始まる事業年度から、デリバティブ取引の時価を貸借対照表に計上（オンバランス）、評価差益損は損益計算書に計上することになる。ここでいう時価の定義は「当該デリバティブ取引の対象としている何らかの金融商品の市場価格又はそれに基づく合理的な価額」となっており、市場性のないエキゾチック・デリバティブについても、合理的な時価評価ロジックを構築する必要がある。

本稿ではJamshidian [5] によるマーケット・モデルをベースにした金利派生商品の評価法、および測度変換によるエキゾチック・デリバティブの合理的なプライシング・ロジックを解説する。当手法は、各種パラメータを推定することなく市場で観測される情報のみを用いて金利デリバティブを時価評価する手法である。また、当ロジックをベースに当社にて作成中の金利デリバティブ取引管理システム「NDS2000」もあわせて紹介する。

しらかわ まさき
興銀第一フィナンシャルテクノロジー（株）
金融工学第二部
〒100-0004 東京都千代田区大手町一丁目5-1
大手町ファーストスクエア
E-mail: masaki-shirakawa@fintec.co.jp

2. 金利市場と評価測度

ファイナンス理論において、金利は仮想的な連続複利として扱われることが多い。しかし実際の市場では連続複利金利は観測されず、単利であるLIBORレート・スワップレートをもとに期間構造が形成されている。また、これらのレートを原資産とした金利デリバティブ市場（キャップ市場・スワップション市場）が成り立っている。これらの市場価格をもとにエキゾチック・デリバティブを評価していく。従来の金利モデルは、いくつかのパラメータを用いて金利の期間構造の変化をモデル化するものが多かった。一方で、一般的に実務界では、原資産である金利レートそのものを確率過程で表現し、Black-Scholes式を用いて簡略的にプライシングをおこなう慣習になっている。この両者の関係を測度変換の考え方を用いて整理する。

以下の記号を使用する。ある商品におけるLIBORの利払日を

$$0 \le t \le T_0 < T_1 < \cdots < T_n < \infty$$
$$\delta_i \stackrel{\text{def}}{=} T_i - T_{i-1}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

とする。ここで毎営業日に観測されるスポットスタートのLIBORレートではなく、期間構造から得られた期間 $[T_{i-1}, T_i)$ におけるフォワードLIBORレートを表す確率過程を $\{L_i(s); s \in [0, T_{i-1}]\}$ とおき、

$$\frac{1}{1+\delta_i L_i(s)} = F(s; T_{i-1}, T_i) \tag{1}$$

と定義する。L_i のフィキシング時点[1] は T_{i-1}、決済時点は T_i である。ただし、$F(s;\tau,T)$ は割引債

$$B(\tau, T) = \tilde{E}_\tau \left[\exp\left\{ -\int_\tau^T r_v dv \right\} \right]$$

[1] スポットLIBORレートの意味で、L_i が観測される時点。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

の時点 s における先渡価格

$$F(s;\tau,T)=\tilde{E}_s\left[\frac{\exp\left\{-\int_s^\tau r_v dv\right\}}{B(s,\tau)}B(\tau,T)\right]$$
$$=\frac{B(s,T)}{B(s,\tau)}$$

を表す。

ここで、$\{r_s; s\in\mathbb{R}^+\}$ は連続複利金利のスポットレート過程、$\tilde{E}_s[\cdot]=\tilde{E}[\cdot|\mathscr{F}_s]$ はリスク中立確率の下での条件付期待値を表す。

期間 $[T_{i-1},T_i)$ の金利 $\delta_i L_i(T_{i-1})$ のコールオプション（時点 T_i に行使レート K で変動金利 $L_i(T_{i-1})$ を受け取る権利；キャップレット）の時点 t における現在価値 $C_i(t)$ は次のように計算される。

$$C_i(t)=\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^{T_i} r_v dv}\delta_i(L_i(T_{i-1})-K)^+\right]$$
$$=\delta_i B(t,T_i)\tilde{E}_t\left[\xi_i(T_{i-1})(L_i(T_{i-1})-K)^+\right]$$
$$=\delta_i B(t,T_i)E_t^i\left[(L_i(T_{i-1})-K)^+\right]$$

確率変数 $\xi_i(T_{i-1})$ は Radon-Nikodym 微分であり、これにより変換された測度を "T_i-Forward LIBOR Measure" と呼ぶ[2]。市場では、この測度の下でフォワード LIBOR レートが次の対数正規型の確率微分方程式に従うと仮定している。

$$\frac{dL_i(s)}{L_i(s)}=\sigma_i\cdot dW_s^i$$

$\{W_s^i; s\in\mathbb{R}^+\}$ は、T_i-Forward LIBOR Measure の下での Wiener 過程である。これにより、連続複利金利 r を用いずに金利オプションが評価可能になる。

次にスワップションをプライシングする。ここで確率過程 $\{S_{i,j}(s); s\in[0,T_i]\}$ は、以下のように期間 $[T_i,T_j]$ のフォワードスワップレートを表し、

$$S_{i,j}(s)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{B(s,T_i)-B(s,T_j)}{\sum_{k=i+1}^j\delta_k B(s,T_k)}$$
$$=\frac{1-F(s;T_i,T_j)}{\sum_{k=i+1}^j\delta_k F(s;T_i,T_k)}$$

である。フォワードスワップレート $S_{i,j}(T_i)$ を原資産とするペイヤーズ（固定払）・スワップションとは、時点 T_i にて、期間 $[T_i,T_j]$ に渡って、変動レート L 受取・固定レート K 払のスワップを組む権利であり、その価格 $C_{i,j}(t)$ は

$$C_{i,j}(t)$$
$$=\tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\int_t^{T_i} r_v dv\right\}\right.$$
$$\left.\times(S_{i,j}(T_i)-K)^+\sum_{k=i+1}^j\delta_k B(T_i,T_k)\right]$$
$$=\sum_{k=i+1}^j\delta_k B(t,T_k)\tilde{E}_t\left[\xi_{i,j}(T_i)(S_{i,j}(T_i)-K)^+\right]$$
$$=\sum_{k=i+1}^j\delta_k B(t,T_k)E_t^{i,j}\left[(S_{i,j}(T_i)-K)^+\right]$$

となる。ここでRadon-Nikodym微分 $\xi_{i,j}(T_i)$ により変換された測度を "$[T_i,T_j]$-Forward Swap Measure" と呼ぶ。この測度の下でフォワードスワップレートは次の確率微分方程式に従う。

$$\frac{dS_{i,j}(s)}{S_{i,j}(s)}=\sigma_{i,j}\cdot dW_s^{i,j}$$

ただし $\{W_s^{i,j}; s\in[0,T_i]\}$ は、$[T_i,T_j]$-Forward Swap Measure の下で Wiener 過程である。すると、キャップレット価格 $C_i(t)$、ペイヤーズ・スワップション価格 $C_{i,j}(t)$ ともに Black-Scholes 式を用いて解析解を求めることができる。市場では、これらの式を用いて計算されたインプライド・ボラティリティ $\sigma_i,\sigma_{i,j}$ を観測することができる[3]。

3. エキゾチック・デリバティブ

Forward LIBOR Measure・Forward Swap Measure ともに、ある特定の原資産をターゲットにした測度であり、汎用性は低い。多数のキャッシュフローが互いに影響を及ぼしあうような商品の場合は、すべてのキャッシュフローを統一的な測度で測る必要がある。

LIBOR レートを原資産とする商品の場合、LIBOR レートそのものを割引関数として利用することができる。例として、時点 T_n に発生するキャッシュフロー C_{T_n} を評価する。これは次式の入れ子状になった条件付期待値を考えればよい。

[2]本質的には、T_i 時点の Forward Measure と同値である。

[3]キャップ市場の場合、キャップレットの集合体である、ある期間のキャップのボラティリティが観測されるだけであり、当キャップを構成する個々のキャップレットごとのボラティリティは何らかの手法を用いて算出する必要がある。また、いわゆる「スマイル現象」が発生しており、インプライド・ボラティリティは行使レートごとに異なった値をとる。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

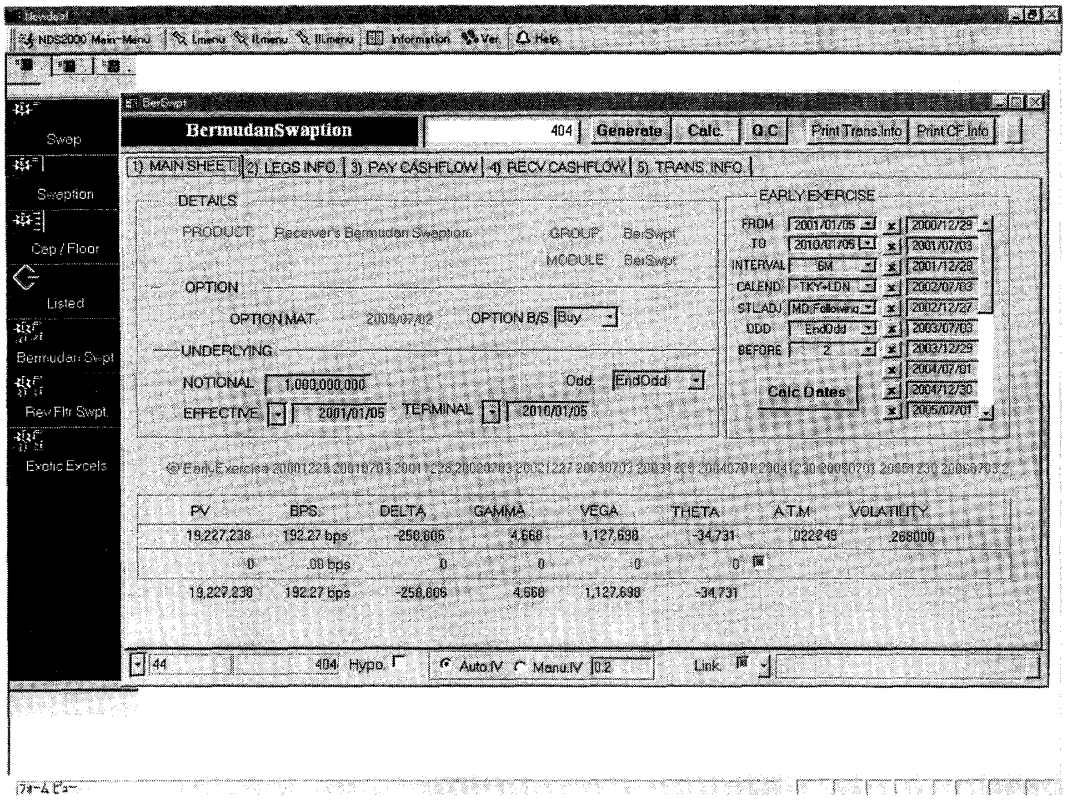


図 1: NDS2000 取引画面（開発中）

商品特性から C_{T_n} が $\mathscr{F}_{T_{n-1}}$-可測であることより、

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^{T_n} r_v dv} C_{T_n}\right] \\
&= \tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^{T_0} r_v dv} \tilde{E}_{T_0}\left[e^{-\int_{T_0}^{T_1} r_v dv} \tilde{E}_{T_1}\left[e^{-\int_{T_1}^{T_2} r_v dv}\right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. \cdots \tilde{E}_{T_{n-1}}\left[e^{-\int_{T_{n-1}}^{T_n} r_v dv} C_{T_n}\right] \cdots\right]\right]\right] \\
&= B(t,T_0)\tilde{E}_t\left[\xi_{t,T_0} B(T_0,T_1)\tilde{E}_{T_0}\left[\xi_{T_0,T_1}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \cdots B(T_{n-1},T_n)\tilde{E}_{T_{n-1}}\left[\xi_{T_{n-1},T_n} C_{T_n}\right] \cdots\right]\right] \\
&= B(t,T_0)E_t^0\left[\frac{1}{1+\delta_1 L_1(T_0)} E_{T_0}^1\left[\right.\right. \\
&\qquad \cdots \frac{1}{1+\delta_{n-1}L_{n-1}(T_{n-2})} \\
&\qquad \left.\left. \times E_{T_{n-2}}^{n-1}\left[\frac{1}{1+\delta_n L_n(T_{n-1})} C_{T_n}\right] \cdots\right]\right]
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\xi_{\tau,T} = \frac{e^{-\int_\tau^T r_v dv}}{B(\tau,T)}
$$

と定義される。このとき、各フォワード LIBOR レート $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ は次の確率微分方程式に従う。

$$
\frac{dL_i(s)}{L_i(s)} = \sigma_i dW_s^* + \sigma_i \sum_{k=n(s)}^{i} \sigma_k \frac{\delta_k L_k(s)}{1+\delta_k L_k(s)} ds \quad (2)
$$

ただし、$n(s)$ は時点 s から直近にフィキシングを迎えるフォワード LIBOR レートのナンバリングを表し、以下の式を満たす。

$$
T_{n(s)-2} \leq s < T_{n(s)-1}
$$

ここで $\{W_s^*; s \in \mathbb{R}^+\}$ は "Spot LIBOR Measure" [5] の下で Wiener 過程である。

4. NDS2000

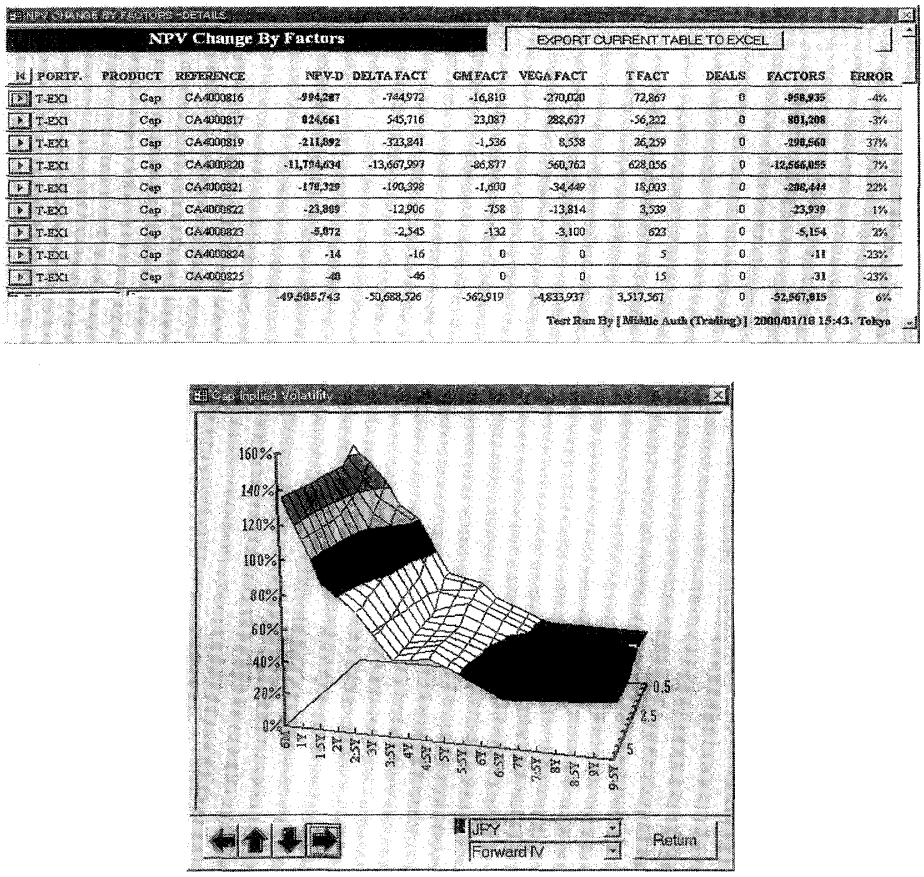
以上のロジックをもとに、当社では金利デリバティブ取引サポートシステム「NDS2000」を作成している。

NDS2000 は、PC 環境（Windows NT）で高速精緻にプライシング・リスク管理・取引管理をおこなうシステムであり、カバーしている商品は、表 1 のとおりである。表 1 にあげられたすべての商品について、

現在価値（PV; Present Value）および各種リスク指標（Delta･Gamma･Vega･Theta）の算出が可能である。各種機能としては、以下にあげるものを備えている。

- 新規取引プライシング（PV）・各種リスク指標計算（Delta・Gamma・Vega・Theta）
- 既存取引の時価評価・リスク管理

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．



NPV Change By Factors

EXPORT CURRENT TABLE TO EXCEL

PORTF.	PRODUCT	REFERENCE	NPV-D	DELTA FACT	GM FACT	VEGA FACT	T FACT	DEALS	FACTORS	ERROR
T-EX1	Cap	CA4000816	-994,287	-744,972	-16,810	-270,020	72,867	0	-958,935	-4%
T-EX1	Cap	CA4000817	824,661	545,716	23,087	282,637	-56,222	0	801,208	-3%
T-EX1	Cap	CA4000819	-211,892	-323,841	-1,536	8,558	26,259	0	-290,560	37%
T-EX1	Cap	CA4000820	-11,794,634	-13,667,997	-86,877	560,762	628,056	0	-12,566,055	7%
T-EX1	Cap	CA4000821	-178,329	-190,398	-1,600	-34,449	18,003	0	-208,444	22%
T-EX1	Cap	CA4000822	-23,869	-12,906	-758	-13,814	3,539	0	23,939	1%
T-EX1	Cap	CA4000823	-5,872	-2,545	-132	-3,100	623	0	-5,154	2%
T-EX1	Cap	CA4000824	-14	-16	0	0	5	0	-11	-23%
T-EX1	Cap	CA4000825	-40	-46	0	0	15	0	-31	-23%
			-49,505,743	-50,688,526	-562,919	-4,833,937	3,517,567	0	-52,867,815	6%

Test Run By [Middle Auth (Trading)] 2000/01/18 15:43. Tokyo

図 2: 変動要因分析と 3D グラフ

- 取引管理
  - 取引入力・修正
  - 金利更改
  - オプション権利行使、等
- シミュレーション
  - イールドカーブ・シフト
  - ボラティリティ・シフト
  - 日付シフト
- 価格の変動要因分析[4]
- 各種帳票作成
- 3D グラフによる市場データ・各種リスク指標の視覚化

当システムのユーザーは、実際にデリバティブを売買するトレーディング・営業部門（フロント・セクション）、ブックされたデリバティブのリスクをチェックし、ポジション管理をおこなう管理部門（ミドル・セクション）および事務部門（バック・セクション）に分かれ、それぞれが上にあげられた機能を用いて業務をおこなっていく。

表 1: 商品群

	Products
Plain	Swap, Cap/Floor, Swaption
Exotic	Bermudan Swaption, CMS Swap/Cap/Floor, Caption/Floortion, Yield-Spread Option, Flexible Cap/Floor, Callable Reverse Floater, etc.
Listed	Euro-yen Futures and Options, JGB Futures and Options

当システムのデータ管理はデータベースソフトを用い、各種計算関数については DLL を作成し、利用している。その際、解析解のないプロセス(2) のもとで、システム上でエキゾチック・デリバティブをプラ

[4]Taylor 展開を利用し、PV の変化量を金利変動要因（Delta・Gamma)、ボラティリティ変動要因（Vega)、時間変動要因（Theta）および残差部分に分解、認識、コントロールする。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

イシング・リスク管理することは非常に難しく、実際には各種数値計算法のノウハウが必要となってくる。

5. 終わりに

本稿では、デリバティブの会計上の時価評価問題、Black-Scholes モデルをベースにした金利モデル、およびその実用化の例を紹介した。しかし現状においても、エキゾチック系商品の内部計算ロジック高速化など実務上の課題はいくつも存在している。特にボラティリティのスマイル問題は、Black-Scholes 式が仮定している分布の対数正規性と実際の市場特性の相違によるもので、原資産過程の（高次）モーメントを調整することによる確率分布の改善も必要になろう。

今後とも金融業務においても金融工学をベースにした OR 的な発想、つまり、現実問題の把握→問題の数理的な定式化→解決、という業務フローによって各種の問題を解決していくことができるものと考えている。

参考文献

[1] Baxter, M. and Rennie, A.: "Financial Calculus, An introduction to derivative pricing." Cambridge University Press (1996).

[2] Brace, A., Gatarek, D. and Musiela, M.: "The market model of Interest rate dynamics." Working paper, May (1995).

[3] Duffie, D. "Dynamic Asset Pricing Theory." Princeton University Press, 2nd edition (1996).

[4] Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A.: "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation." *Econometrica*, **60**(1), 77–105 (1992).

[5] Jamshidian, F.: "LIBOR and swap market models and measures." *Finance and Stochastics*, **1**(4), 293–330 (1997).

[6] Musiela, M. and Rutkowski, M.: "Continuous-time term structure models: Forward measure approach." *Finance and Stochastics*, **1**(4), 261–291 (1997).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.