

Matrices and Matroids for Systems Analysis

Springer-Verlag 483頁 2000年 定価15,870円 (189マルク)

MathSciNet でマトロイド (matroid) がタイトルに入る著書を検索すると、英語はもちろんイタリア語、ドイツ語、フランス語、ロシア語で書かれたものを含め20冊を超える本(論文集等は除く)が見つかる。しかし、これらの中で工学的立場から書かれたものは

[1] Kazuo Murota, *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, Springer-Verlag, 1987.

[2] András Recski, *Matroid Theory and its Applications in Electric Network Theory and in Statics*, Springer-Verlag, 1989.

の2冊のみで、最新刊である本書が3冊目となる。本書は上記の[1]をベースとしてはいるが改訂版というのではなく、近年までの著者の研究成果をまとめ上げたまったくの別物である。

電気回路や力学系などにおいて線形方程式系で記述されるシステムの解析を組合せ的手法によって行うことが本書の目的である。例えば、行列の階数を推定する組合せ的手法としては、2部グラフを用いた次のようなものが存在する。 $m \times n$ 行列 A に対して、行集合 R と列集合 C を頂点集合とし、 A の (i, j) 要素が非ゼロであるとき第 i 行と第 j 列に対応した頂点同士を辺で結ぶことでできる2部グラフ $G(A)$ を考える。 $G(A)$ の最大マッチング(端点を共有しない辺の集合で要素数最大のもの)の大きさを $\nu(G(A))$ とおくと、一般的に $\text{rank} A \leq \nu(G(A))$ が成立する。以上のような方法で行列の階数の上界が数値誤差なしに求まる。もし行列の階数を求める算法において数値的なキャンセルが起こらないならば(例えば非ゼロ要素が代数的に独立ならば)上記の不等式は等号で成立し、グラフの最大マッチングを求めることで行列の階数が計算できる。ただし、この非ゼロ要素が代数的に独立という仮定は工学的な応用においては強すぎる。例えば電気回路の解析において、抵抗値のような数が代数的独立としても実用上問題がないかも知れないが、キルヒホフの電流則に現れる非ゼロ係数(-1または+1)については到底このような仮定は成立しない。本書を貫く

発想は、行列の非ゼロ要素を2種類の数、キルヒホフの電流則に現れるような正確な数と抵抗値のような不正確な数に分類し、不正確な数は代数的に独立であるとし、より精緻に組合せ的手法を適用することである。このための道具が、マトロイドや付値マトロイド(valuated matroid)となる。

簡単にはあるが、本書の構成をみてみよう。第1章「Introduction to Structural Approach」を読んで頂ければ、本書を貫く哲学が理解できる。第2章「Matrix, Graph, and Matroid」は必要となる基礎知識の解説であるが、他の著書を読む必要がないように書かれていて講義用にも使えるだろう。第3章「Physical Observations for Mixed Matrix Formulation」では、混合行列、混合多項式行列、次元解析など本書のアプローチの解説がなされている。第4章「Theory and Application of Mixed Matrices」では、層混合行列やその組合せ論的標準形の理論やアルゴリズムが展開される。第5章「Polynomial Matrix and Valuated Matroid」と第6章「Theory and Application of Mixed Polynomial Matrices」では、混合多項式行列とそれに対する付値マトロイドを用いた解析についての議論がなされている。第7章「Further Topics」では、組合せ的緩和法やデルタマトロイドの議論などの研究テーマが触れられている。本書には大学院生ならば追える証明がきちんと入り、イメージを与えてくれる図や例がふんだんに盛り込まれている。

私自身はマトロイドを上記の[1]や[2]以外の本で勉強したが、そこには理学的立場からのマトロイド理論が展開されている。本書で展開される「工学的立場からマトロイドをみる」という私にとって新しいものの見方に触れた嬉しさで、決して薄くはない本であるが苦勞なく読み通した。多少オーバーではあるが、異なる文化に触れた喜びのようなものを感じた。組合せ最適化の研究を志す学生はもちろん研究者に対しても一読を薦めたい一冊である。

(京都大学 田村明久)