Hot News

劣モジュラ関数最小化の組合せ的強多項式時間アルゴリズム—20年近くの未解決問題を解決

藤重　悟

空でない有限集合 V の各部分集合に対して実数値を与える集合関数 $f: 2^V \to \mathbf{R}$ がつぎの不等式を満たすとき，この f を劣モジュラ関数と呼ぶ（文献 [3], [5], [11] などを参照されたい）.

$$f(X)+f(Y) \geq f(X \cup Y)+f(X \cap Y) \quad (X, Y \subseteq V)$$

劣モジュラ関数は，典型的にはグラフ・ネットワークに関係する多くの組合せ最適化問題に現れ，他にシャノン情報理論，凸ゲーム，経済モデル等にも現れる.

効率よく解かれる組合せ最適化問題は必ず劣モジュラ関数 (あるいはマトロイド) が関係していると言われるほどに，劣モジュラ性は組合せ最適化問題を取り扱う際に極めて基本的である．そして，劣モジュラ関数最小化問題はそのような組合せ最適化問題の部分問題としてしばしば顔を出し，これまで通常，効率よく劣モジュラ関数最小化ができることを前提として関係するアルゴリズムが構成されている．また，L. Lovász による集合関数のいわゆる Lovász 拡張，A. Frank の離散分離定理，筆者の Fenchel 型最大最小定理などによって劣モジュラ関数の有する凸性が認識され，劣モジュラ関数最小化問題は，通常の凸関数最小化問題においてそうであるのと同様に，(組合せ) 最適化の基本問題である．この認識のもとに，最近 Murota[12] は離散凸解析の理論を展開している.

劣モジュラ関数最小化の最初の多項式時間アルゴリズムは，1981 年に Grötschel-Lovász-Schrijver による記念碑的論文 [7] において示された．しかしながら，彼らのアルゴリズムは Khachiyan の楕円体法に基づく弱多項式時間アルゴリズムで，実用的な意味での効率の悪さと共に，組合せ的でないということにより，満足できるものではなかった．そのために，その後，組合せ的方法で劣モジュラ関数を最小化するいくつかの試みがなされた．まず，Cunnigham[1] によって，与えられたベクトルがマトロイド多面体に属するか否かを判定する問題（マトロイド-メンバシップ問題）に対する強多項式時間アルゴリズムが与えられた．これは，マトロイド階数関数にモジュラ関数を加えた形の劣モジュラ関数最小化問題に関係している．一般の劣モジュラ関数最小化に対しては，最初の組合せ的な擬多項式時間アルゴリズムが Cunningham[2] によって与えられた．また，Grötschel-Lovász-Schrijver によって，1988 年の彼らの本 [8] の中で強多項式時間アルゴリズムが示された．しかし，これも再び楕円体法に基づく効率の悪い非組合せ的アルゴリズムであり，強多項式時間アルゴリズムの存在を示す以上の意味を持たなかった．さらにその後も，いくつかの関連する研究があるが，大きな進展はみられなかった.

一方，Edmonds-Giles によって提示され，多くの効率よく解かれる組合せ最適化問題を包含するモデルである劣モジュラフロー問題に対する解法の研究が展開されてきている（サーベイ論文 [6] を参照)．この中で，1997 年の Iwata[9] のスケーリング法は，劣モジュラ関数最小化への道を開くものであった．このスケーリング法を基本的枠組みとして，ごく最近の Fleischer-Iwata-McCormick による高速化 [4] のアイデアにヒントを得て，Cunningham[1], [2] のアプローチを基に，Iwata-Fleischer-Fujishige[10] は劣モジュラ関数最小化の組合せ的強多項式時間アルゴリズムを得ることに成功した．1981 年以来，組合せ的多項式時間アルゴリズムの開発が大きな未解決問題として残されてきたが，18 年後の解決となった．Edmonds の話では，論文 [3] をまとめた頃に劣モジュラ関数最小化問題を認識していたというから，それから 30 年後の解決ということになる.

ところで，全くの偶然であるが，独立にほぼ同時に Schrijver[13] も，同じ Cunningham[1], [2] の枠組みによって，しかしながら全く違う形で，強多項式時間アルゴリズムを得ることに成功している．解決の期が熟したかのように長年の未解決問題が同時に解決されたのは驚きである.

ふじしげ　さとる　大阪大学大学院基礎工学研究科
〒560-8531 豊中市待兼山町 1-3

我々のアルゴリズム [10] では，与えられた劣モジュラ関数 $f:\ 2^V \to \mathbf{R}$ が整数値関数である場合に Iwata[9] のスケーリング法に基づいて $\mathrm{O}(n^5 \log nM)$ 時間の弱多項式時間アルゴリズムを導き（$n = |V|$, $M = \max\{|f(X)| \mid X \subseteq V\}$），これをサブルーティンとして $\mathrm{O}(n^2)$ 回用いて一般の劣モジュラ関数の $\mathrm{O}(n^7 \log n)$ 時間の強多項式時間アルゴリズムを得ている．実用上は，$\mathrm{O}(n^5 \log nM)$ 時間の弱多項式時間アルゴリズムが効率よいものとして使えそうに思われる．

今後に残された課題としては，(1) 計算の高速化，(2) $\mathbf{R}$ から乗除を排除した順序加群としての演算だけを許した多項式時間アルゴリズムの開発，などが残されている．個人的には，この後者の課題をなんとかして解決したいと思っている．

今回の未解決問題の解決にあたって岩田さんの貢献が極めて大きい．約 20 年間の課題を解決に導いてくれた岩田さんと Lisa Fleischer に感謝する次第である．

ところで，D. R. Fulkerson は長年，パーフェクトグラフ予想に挑戦し，それを否定的に証明しようとして証明に失敗し，Lovász が肯定的に証明したことを知らされるや否や自らもその証明が出来たと伝えられる．失意のうちにこの世を去った Fulkerson の最後の年齢と同じ歳になって解決できたのは何かの因縁ではないかと思っている．

参考文献

[1] W. H. Cunningham: Testing membership in matroid polyhedra, *Journal of Combinatorial Theory* **B36** (1984) 161–188.

[2] W. H. Cunningham: On submodular function minimization, *Combinatorica* **5** (1985) 185–192.

[3] J. Edmonds: Submodular functions, matroids, and certain polyhedra, *Combinatorial Structures and Their Applications*, (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds., Gordon and Breach, 1970), pp. 69–87.

[4] L. Fleischer, S. Iwata, and S. T. McCormick: A faster capacity scaling algorithm for submodular flow. Discrete Mathematics and Systems Science Research Report No. 99-08, Osaka University (August 1999).

[5] S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization* (North-Holland, 1991).

[6] S. Fujishige and S. Iwata: Algorithms for submodular flows, *IEICE Trans. Information and Systems* (to appear).

[7] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, *Combinatorica* **1** (1981) 169–197.

[8] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, (Springer, 1988).

[9] S. Iwata: A capacity scaling algorithm for convex cost submodular flows, *Mathematical Programming* **76** (1997) 299–308.

[10] S. Iwata, L. Fleischer, and S. Fujishige: A strongly polynomial-time algorithm for minimizing submodular functions. Discrete Mathematics and Systems Science Research Report No. 99-07, Osaka University, July 1999 (revised version, *ibid.* No. 99-13, October 1999); also, 情報処理学会「アルゴリズム研究会」, アルゴリズム 70–2, pp. 9–16 (1999 年 11 月 8 日).

[11] L. Lovász: Submodular functions and convexity, *Mathematical Programming — The State of the Art* (A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte, eds., Springer-Verlag, 1983), pp. 235–257.

[12] K. Murota: Discrete convex analysis, *Mathematical Programming* **83** (1998) 313–371.

[13] A. Schrijver: A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time, preprint 1999.

メモ: **弱多項式時間アルゴリズム**とは，いわゆる多項式時間アルゴリズムを意味する．これは，つぎに述べる強多項式時間アルゴリズムと対比させるために使われる．**強多項式時間アルゴリズム**とは，問題を記述する際に現れる数値データのビット数には依存しないで，現れる数値の個数や問題の構造を決める数（たとえば，グラフの点や枝の数）などの多項式で押さえられる時間で問題を解くアルゴリズムのことである．また，**擬多項式時間アルゴリズム**とは，数値データのビット数ではなく，数値そのものの値も含んでよい多項式で押さえられる時間で解くアルゴリズムのことである．なお，本文では，f の各関数値を一定時間で得られると仮定している．