P. Bremaud 著

Markov Chains

(Gibbs fields, Monte Carlo simulation and Queues)

Springer-Verlag 1999 年

1. 本書との出会い

本書については著者が関係者に流したメールで知ったが，当初は，またマルコフ連鎖の本が1冊出たのかという程度の感想しか持っていなかった．たまたま，秋のOR学会で展示即売があり，ざっと目を通したところやさしそうな本なので，学生が読むのに手頃かなと思い購入した．実際，本書は大学の教養の数学程度を知っていれば十分に読むことができる．ところが読んでみるとこれがなかなかなのである．本書のサブタイトル（Gibbs fields, Monte Carlo simulation and Queues）には惑わされない方がよい．これらの題目に興味のない読者は，何かマルコフ連鎖の応用をまとまりなく論じているだけではないのかと思うかもしれないし，興味のある読者は読んでみて，ちょっとがっかりするだろう．実際に論じられている応用は，サブタイトル以外にも，ランダムウォーク，信頼性，在庫管理，熱力学，遺伝過程，分岐過程，ニューラルネットなど，幅広い．ただし，この本で，確率モデルの応用分野について勉強をしようなどとは思わない方がよい．扱う分野は広いが内容は簡単なものが多い．

著者のねらいは，マルコフ連鎖による応用モデルの解析において役立つ各種の理論的な方法論やモデル化の枠組みを紹介することにある．従来のマルコフ連鎖の本は，一つの方法論を使って統一的に論じるものが多かった．例えば，Seneta[5]は行列理論を使い，Chung[2]は実解析を主に使っている．もともと古くは確率論や確率過程論の研究者は解析学者であった場合が多く，複素関数論や関数解析を始めとした解析手法が広く使われてきた．初めて読んだときは確率論の応用の広さに感心したFeller[3]の本なども今から見るとかなり解析的な本である．一方，Ross[4]やÇinlar[1]に代表される入門書は解析的手法の簡易版といった感があり，マルコフ連鎖の極限確率の存在やBrackwellの再生定理など基本的な結果の証明が省略されていて，いまいち満足できない．

本書もすべてにわたり完全な証明をつけているわけではないが，論理的な枠組みが明快で基本的な結果はきちんと証明されているし，少なくとも何を勉強すればよいかを知ることができる．確率論の一番の基礎である確率空間については測度論的な解説はほとんどなく，初等的な確率論の範囲で確率や測度を知らなくとも十分に読める．状態空間が離散的なマルコフ過程を扱っているのでこれで十分なのである．ただし，条件付き期待値（確率変数の意味で定義される）などの重要な概念についてはRadon-Nikodymの定理による一般的な定義こそないが，確率変数を離散に限った場合の厳密な定義を与えている．

2. どこが面白いのか

本書の一貫した思想は，解析的な手法をできるだけ使わず，ということは複雑な計算はできるだけ避けて，確率的な意味を持った概念や方法論によってマルコフ連鎖の理論的な結果を導くことにある．また，同時に，例題によって，得られた結果が実際の問題の解決に役立つことを示す．一言でいうと，実証的な本で，こんなに役立つことがこんなに簡単に得られるのだから，勉強しないと損ですよと読者を説得しているようである．私はまだこの本をゼミで使ってはいないが，初学者が読むのに大変よい本である（学部レベルでは少しきついかもしれない）．同時に，確率モデルの研究者にも是非読んでもらいたい．

本書は取り立てて新しい方法論を論じているわけではないが，入門的な本で，マルコフ連鎖の極限定理などを厳密に，しかも，複雑な議論なしに証明しているところは注目される．これまでの伝統的な方法は，まず，Blackwellの再生定理を証明し，その結果を使って極限の存在を示す．しかし，再生定理の解析的な証明は複雑で，初等的な本では省略されることが多い．本書の行き方は逆である．初めに，再帰的な（元の状態へ確率1で戻る）マルコフ連鎖の定常測度を構成し，正再帰的な場合（元の状態に戻るまでの時間の期待値

が有限）には，この測度がマルコフ連鎖の定常な確率分布となることを使って，定常マルコフ過程を構成する．次に，任意に与えた状態から出発したマルコフ連鎖の標本関数を，有限な時刻（ランダムである）以降，先に構成した定常マルコフ連鎖の標本関数と一致するよううまく作り，極限確率の存在とそれが定常確率に一致することを同時に証明する．この方法は，Coupling法と呼ばれており，日本でも都立大の中塚先生が研究されている．この極限定理が証明されると，再生定理はその系として簡単に導かれる．

特に興味深かった章は，安定性を論じるためにリヤプノフ関数とマルチンゲールについて解説した5章である．著者は特に示唆はしていないが，行間からなぜ定常分布の存在を論じるためにリヤプノフ関数が必要であるかが読みとれる．簡単にいうと，一般にマルコフ連鎖の状態間には順序関係がないので，状態空間を安定性が論じやすい空間（半直線上の可算個の点）へ写像する．この関数がリヤプノフ関数である．

3. 主な内容

つい興味を持ったところを中心に述べてしまったが，全体的な内容を知りたい方のために章立てを紹介しておこう．

1 **確率論の簡単な解説**（とはいっても，大数の強法則を厳密に証明している）

2 **離散時間マルコフ連鎖**（標準的な紹介だが，強マルコフ性を正確に論じている）

3 **再帰性とエルゴード性**（再帰点を使った定常測度の構成は一読の価値あり）

4 **長時間の特性**（Coupling法，再生定理，再生型確率過程など）

5 **リヤプノフ関数とマルチンゲール**（ポテンシャルと再起性についても論じられている）

6 **固有値と斉時でないマルコフ連鎖**（有限状態マルコフ連鎖の理論をPerron-Frobeniusの定理とその応用を中心に解説）

7 **ギブス体とモンテカルロシミュレーション**（マルコフランダム体とギブス分布，Simulated Annealingの理論的基礎など）

8 **連続時間マルコフ連鎖**（標準的内容）

9 **ポアソン解析と待ち行列**（著者の得意とする分野だが，この本では遠慮したのか内容は軽い）

なお，Prefaceではマルコフ過程の歴史と発展の過程が興味深く解説されている．また，Useful, Simple and Beautiful Theoryという表題の節もあり，著者が目指しているものを端的に表現している．

4. おわりに

最後に，著者が授業をもとにこの本を書いたことを示す次の文を引用して締めくくりたい．

> Zermelo, who obviously was not sleeping in the back of the classroom, argued that in view of the time reversibility of the laws of physics, the Boltzmann theory at least be discussed. … it would imply that the chunk of sugar that one patiently dissolves in one's cup of coffee could escape ingestion by reforming itself at the bottom of the cup.

おそらく寝ていた学生も耳をそばだてたであろうと思うと，Bremaud先生も授業に苦労されている様子がうかがえて苦笑してしまった．

（東京理科大学　宮沢政清）

参考文献

[1] E. Çinlar (1975) *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall.

[2] K. L. Chung (1975) *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*, 2nd ed., Springer-Verlag.

[3] W. Feller (1971) *Introduction to Probability Theory and Its Applications* Volume I, 3rd ed., Wiley.

[4] S. M. Ross (1997) *Introduction to Probability Models* 6th ed., Academic Press.

[5] E. Seneta (1981) *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2nd ed., Springer-Verlag.