Branch-and-cut algorithms for bilinear matrix inequality problems

福田　光浩

（東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻　現所属・同大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻博士後期課程）
指導教官　小島政和 教授

1. はじめに

1990年代に入り，主・双対内点法による半正定値計画問題（SDP）の効率的な解法が理論，実用の両側面において確立されてきた．その中で，システムと制御の分野では制御系設計に用いられる線形行列不等式（Linear Matrix Inequality - 以下 LMI）の重要性が再び指摘されるようになった [2]．LMI は対象とする制御系の線形モデルであり，SDP によって解くことができる．しかし，より複雑なシステムを考察するには双線形行列不等式（Bilinear Matrix Inequality - 以下 BMI）を用いる必要性がここ数年来認識されるようになった [6]．BMI は LMI の双線形拡張であり，与えられたいくつかの対称行列を双線形結合して得た行列が半正（負）定値行列であるという不等式のことである．BMI は LMI よりも一般的である一方，理論的にも計算上でも極めて困難な問題（NP 困難な問題）になり，これまで実用規模の問題を解く数値解法は開発されていなかった．本論文では BMI を制約とした最適化問題，BMI 固有値問題（BMIEP）を数理計画法の立場から解析し，分枝カット法に基づく計算手法を提案した．

対称行列 $B_{ij} \in R^{k\times k}$ $(0 \le i \le n;\ \ 0 \le j \le m)$ が与えられているとすると，（BMIEP）は次のように定式化される：

$$
\text{(BMIEP)} \begin{cases} \min & \lambda \\ s.t. & \lambda I - B(x,y) \succeq O \\ & (x,y) \in \mathcal{H} \subseteq R^n \times R^m \end{cases} \qquad (1)
$$

ただし，$B(x,y) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m x_i y_j B_{ij} + \Sigma_{i=1}^n x_i B_{i0} + \Sigma_{j=1}^m y_j B_{0j} + B_{00}$，$I$ は単位行列，$A \succeq O$ は行列 A が半正定値行列であることを意味している．(1) は B_{ij} を双線形結合して得た行列 $B(x,y)$ の最大固有値を超立方体 $\mathcal{H} = [\underline{x}, \overline{x}] \times [\underline{y}, \overline{y}]$ 上で最小化する最適化問題と解釈できる．

（BMIEP）に関しては，分枝限定法等による解法が提案されている [3,4]．本論文では従来用いられた緩和問題よりも良い下界値を与える緩和を提案した．それは（BMIEP）に現れるお互いに双線形な関係にある変数ベクトル x, y のダイアド xy^T をより狭い多面体で近似することに基づいている．

2. ダイアド行列 xy^T の近似

第3節の準備として，（BMIEP）の非凸性を反映した集合 $\mathcal{F}_W = \{(x,y,W) \in \mathcal{H} \times R^{nm} : W = xy^T\}$ を多面体で緩和することを考える．まず自明なものとしては

$$
\tilde{\mathcal{F}}_W = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,W) \in R^n \times R^m \times R^{nm} : \\ w_{ij} \le \overline{y}_j x_i + \underline{x}_i y_j - \underline{x}_i \overline{y}_j, \\ w_{ij} \le \underline{y}_j x_i + \overline{x}_i y_j - \overline{x}_i \underline{y}_j, \\ w_{ij} \ge \underline{y}_j x_i + \underline{x}_i y_j - \underline{x}_i \underline{y}_j, \\ w_{ij} \ge \overline{y}_j x_i + \overline{x}_i y_j - \overline{x}_i \overline{y}_j, \\ 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le m \end{array} \right\}
$$

が挙げられる．本論文では，Yajima *et al.* [5] の補題を用いて，$\mathcal{F}_W$ の凸包は組合わせ理論で良く知られているブール2次多面体 [1] を完全2部グラフ $K_{n,m}$ 上で定義したものとアフィン変換を通して一致することを示した．しかし，この多面体を完全に記述すること自体は NP 困難な問題である．そこで，この多面体のファセットの中でも生成しやすいものを用いて，（BMIEP）の緩和問題に追加することを試みた．具体的には $e(\cdot)$ を変数 x, y, W の線形関数とすると $\underline{a}_{ikjl} \le e(x_i, x_k, y_j, y_l, w_{ij}, w_{il}, w_{kj}, w_{kl}) \le \overline{b}_{ikjl}$ $(1 \le i \ne k \le n;\ \ 1 \le j \ne l \le m)$ のような不等式である．それらのファセットは $\mathcal{O}(n^2m^2)$ 個あるため，すべてを緩和問題に入れると問題のサイズが大きくなり短時間で解けない．

3. （BMIEP）の緩和問題

分枝カット法等においては緩和問題の良否がアルゴリズムの挙動を大きく左右する．（BMIEP）の緩和問題としては各双線形項を $w_{ij} = x_i y_j$ に置き換え，$\mathcal{F}_W$

を $\widetilde{\mathcal{F}}_W$ という多面体で近似することによって

$$\begin{cases} \min & \lambda \\ s.t. & \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}) \succeq \boldsymbol{O} \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{W}) \in \widetilde{\mathcal{F}}_W \end{cases} \tag{2}$$

という線形問題が考えられる [3]. ただし, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{W})$, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{W}$ とする. (2) は SDP であり, それを解くことによって (BMIEP) の下界値を得ることが分かる. さらにこの問題に第2節で出てきたカット (不等式) を加えることによって, より良い下界値を得ることが実際できた.

4. 分枝カット法

分枝カット法の詳細をここでは記述しないが, 次のような発見的手法を組み入れてアリゴリズムの高速化を計った:

- 分枝規則として一般的に使われている2等分割規則を拡張したものを取り入れた. 分割した各子問題から得られる最適値 (下界値) をなるべく上げるように考慮した方法であり, これによって計算時間が従来より最高で約24% 短縮できた;
- (BMIEP) の下界値を得るには SDP を解くことになるが, 頻繁に SDP を解くことは計算時間の負担が大きい. したがって, 毎回カットを入れて緩和問題を解き直すよりも, カットを入れることによってどれほど下界値が改善されるかどうかということを事前におおよそ検討し, カットを追加した緩和問題を解くべきかどうかという判断が加えられた;
- (BMIEP) の近似解は解く問題のサイズによって2方法 [3, 4] を組み合わせて用いた.

5. 数値実験

SDP を解くのには SDPA4.20 [藤沢ら, 1998] を用い, DEC Alpha (599MHz - 1GB memory) で数値実験を行った. (BMIEP) を各サイズごとに7題から20題ランダムに発生した. 各問題の大域最適解を算出するのに必要な計算時間を箱形図を用いて図1に要約した. 図から分かるように最もサイズの大きい問題は変数ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の各次元が10と121個の対称行列 $\boldsymbol{B}_{ij} \in \boldsymbol{R}^{40\times40}$ から成る問題であり, 約12時間で完全に解けた.

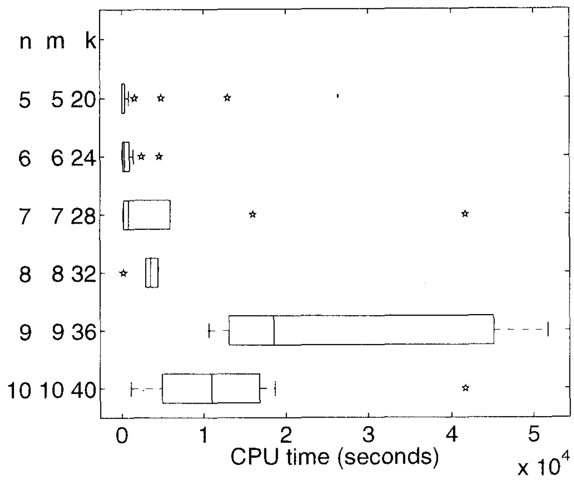

図 1: ランダム問題に対する分枝カット法

6. まとめ

本論文では BMI を制約とした最適化問題 (BMIEP) に対してより優れた緩和とそれに基づく分枝カット法を提案した. 計算機で実装した結果, 従来解くことのできなかった中規模の (実用的にも役に立つ規模の) 問題が解けるようになった.

参考文献

[1] M. M. Deza and M. Laurent: *Geometry of cuts and metrics* (Springer-Verlag, Berlin, 1997).

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: *Linear matrix inequalities in system and control theory* (SIAM, Philadelphia, 1994).

[3] H. Fujioka and K. Hoshijima: "Bounds for the BMI eigenvalue problem - a good lower bound and a cheap upper bound", *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers* **33** (1997) 616–621.

[4] K.-C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos: "Global optimization for the biaffine matrix inequality problem", *Journal of Global Optimization* **7** (1995) 365–380.

[5] Y. Yajima, M. V. Ramana and P. M. Pardalos: "Cuts and semidefinite relaxations for nonconvex quadratic programs", Research Report 98-1, Depart. of Industrial Engineering and Management, Tokyo Institute of Technology, January 1998.

[6] 第10回 RAMP シンポジウム論文集, 京大会館, 1998年9月24日-9月25日.