

Linear Programming 1 : Introduction (Springer Series in Operations Research)

Springer-Verlag 435 頁 1997 年 定価 9,340 円

この本が発刊されたのは 97 年だから、99 年の今ではもう新刊書といえないし、すでにお読みの方も少ないだろう。書評を頼まれたのは去年の OR 学会秋季発表会のときだったから、1 年以上も書棚に飾ってあったことになる。さぼっていたと言われても反論できないが、第一著者の名前に気後れしてなかなか筆をとる気になれなかった。その著者の名は George B. Dantzig, 線形計画法の父であり、オペレーションズ・リサーチを確立した最重要人物の一人である。この本は、Dantzig が 36 年前に世に出した古典的名著 *Linear Programming and Extensions* [3] を、その弟子 Thapa とともに全面的にリニューアルした三部作の第 1 部なのだ。第 2, 3 部は未刊だが、テーマごとに三部に分かれているのではなく、第 1 部では学部学生を対象に線形計画法のアイデアを一通り、平易に説明することが目的とされ、定理の証明など詳細は第 2 部以降へと先送りされている。しかし、そのことでこの本が数学的な厳密さを欠くという議論は的はずれている。そもそも、この本は数学やアルゴリズムの教科書ではなく、「線形計画法」の教科書だからだ。Dantzig 自身が序文でも述べているように「線形計画法」を支えているのはモデルとアルゴリズムとコンピュータ（ソフトウェア）の三本柱であって、アルゴリズムだけが線形計画法ではない。その意味で、この本は正しく「線形計画法」の入門書といえる。

さて、本の内容を章ごとに追っていきこう。第 1 章では、「線形計画問題」と題して様々な問題例が紹介されている。しかし、通常の教科書とは異なり、さらに踏み込んでモデル化の方法をアルゴリズムに二通り紹介し、それぞれの手順に従って丁寧に生産計画問題を線形計画問題へと定式化して見せてくれる。そのために第 4 章「内点法」の実に倍以上のページ数を割き、三本柱の一つ「モデル」の重要性を訴えている。

第 2 章で 2 変数の問題と 2 制約条件の問題のグラフィカルな解法を紹介したのち、第 3 章でいよいよ「単体法」が登場する。基底行列の LU 分解（付録 B「線形方程式」に説明がある）や積形式などコーディング上のテク

ニックに関する説明こそないが、実行可能基底が与えられた場合から始まって、2 段階単体法、有界単体法、改訂単体法と説明が続く。商用コードは無理だが、この章を読むだけで卒論や修論に使うコードなら十分書き上げることができる。

第 4 章の「内点法」で取り上げられているのは Dikin のアルゴリズムだけである。いささか物足りなさを感じるが、これは単体法発案者の内点法に対する意地悪などではなく、その膨大なバリエーションを入門編である第 1 部の中に納めきれなかっただけのことだ。歴史的な経緯と理解の容易さから、ここでは Dikin のアルゴリズムが選ばれているが、第 2 部では 96 年現在における内点法のステート・オブ・アーツが紹介されるとのことなので、今からその発刊が待ち遠しい。

第 5 章の「双対性」は線形計画法の理論的な後ろ盾となる重要な概念だが、詳細は第 2 部にゆずられており、ここではごくあっさりとは片付けられている。その代わりに应用到直接役立つものとして、第 6 章には一見したところ線形計画問題に見えない問題、つまり絶対値を含む問題や、複数の線形関数の最大値の最小化、 L_1 , L_∞ ノルムによる曲線のあてはめなどを線形計画法で処理する方法が述べられている。

第 7 章の「価格機構と感度分析」では、かなり詳しく単体法の経済学的解釈が行われている。線形計画問題が Leontief の投入産出モデルを原型とし、また黎明期には Koopmans が経済学における最重要課題であった稀少資源の最適配分問題を線形計画法によって解決したことを思えば、Dantzig にとって、こうしたトピックスに多くのページを割くのは当然のことなのかもしれない。

三分の一のページを残したところで線形計画法の基礎は終わり、次にネットワーク流の話が始まる。その皮切りとなる第 8 章「輸送と割当問題」には、いくつかの数値例を使って飛び石法などの古典的アルゴリズムが紹介してある。第 9 章ではより本格的に、最大流問題に対する増量可能路法、最短路問題と Dijkstra 法、最小全域木が解説され、最後は最小費用流問題で締めくくられて

いる。ここでも、計算の複雑さなどの議論は最小限にとどめられ、最小費用流問題に対するアルゴリズムも実用性本位のネットワーク単体法のみが紹介されている。

各章末には、本文に書ききれなかった細かな事項に関する注釈がまとめられているが、そこでの著者達のうんちくが楽しい。また、豊富な演習問題もこの本の特徴であり、その中には著者達が教鞭をとる Stanford 大学の博士課程で出題された問題も含まれている。

付録A「線形代数」、付録B「線形方程式」のほかに、この本にはうれしいオマケが二つ付いている。その一つは、Dantzig の書く 12 ページにわたる序文“Linear Programming – The Story About How It Began: Some legends, a little about its historical significance, and comments about where its many mathematical programming extensions may be headed”である。ほぼ同じものが Lenstra 他編の *History of Mathematical Programming* [5] にも掲載されているので内容をご存じの方も多いかもしいないが、副題の通りに線形計画法の研究がどのようにして始まったかが、今や神話と化した数々のエピソードを交えて I (私) を主語に語られている。数理計画法の研究に携わる者にとっては鳥肌が立つほどにエキサイティングであり、また、そうでない人にとっても、下手な小説や映画などより余程おもしろく、一読の価値がある。

そしてもう一つのオマケが最近流行の CD-ROM である。中には Thapa の手による単体法、Dikin の内点法、感度分析、ネットワーク流問題に対する各アルゴリズムのソフトウェアが収められており、Windows 上で起動する。処理できる問題規模は、普通の線形計画問題で 50 変数、25 制約式とかわいらしいものだが、章末問題のいくつかはこのソフトウェアを使って解くようになっており、その目的のためには十分である。ピボットや歩み幅をユーザーが決めることもできるので、手計算に煩わされることなく、アルゴリズムの振る舞いを理解することができる。学生時代、紙と鉛筆を使って単体表と格闘した評者にとって、まさに隔世の感がある。

Linear Programming and Extensions や Gass の *Linear Programming: Methods and Applications* [4] を線形計画法の教科書の第一世代とすれば、Chvátal [2] や Bazaraa 他 [1] は第二世代の最もポピュラーな教科書だ。評者が線形計画法を学んだのも第二世代の教科書からであるが、その頃を境にして線形計画法に占めるアルゴリズムの割合は徐々に高まり、Schrijver [7] や Padberg [6]

に至っては最早 OR の教科書と呼びづらいまでの内容に進化した。それら第二世代以降の教科書に比べ、この *Linear Programming 1* は明らかに異なる。モデルとアルゴリズム、コンピュータをバランスよく扱い、むしろ先祖返りしているようにすら思える。下敷きとなっているのが第一世代の *Linear Programming and Extensions* であることもあろうが、これをアルゴリズムに偏りすぎて線形計画法の敷居が高くなってしまったことへの警鐘と受けとめたい。しかし、この本が第三世代のスタンダードとなりうるかは、これに続く第 2 部、第 3 部を実際に手に取って見ないことには判断がつかない。はしがきの予告によれば、第 2 部の“Theory & Implementation”は大学院生向け、第 3 部の“Structured LPs & Planning Under Uncertainty”はセミナーの教材などに適した、さらに高度な内容となるようだ。したがって、学部学生が第 1 部から順に読み進めば、大学院を卒業する頃には立派な OR ワーカーができあがる寸法となっている。

(筑波大学 久野誉人)

参考文献

- [1] Bazaraa, M.S., J.J. Jarvis and H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows (2nd ed.)*, Wiley, 1990.
- [2] Chvátal, V., *Linear Programming*, W.H. Freeman, 1983 (坂田, 藤野訳, 線形計画法 上・下, 啓学出版, 1986)
- [3] Dantzig, G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton Univ. Press, 1963 (小山訳, 線型計画法とその周辺, ホルト・サンダース, 1983).
- [4] Gass, S.I., *Linear Programming: Methods and Applications (4th ed.)*, McGraw-Hill, 1975 (小山訳, 線形計画法: 方法と応用, 好学社, 1975).
- [5] Lenstra, J.K., A.H.G. Rinnooy Kan and A. Schrijver, *History of Mathematical Programming: A Collection of Personal Reminiscences*, North-Holland, 1991.
- [6] Padberg, M., *Linear Optimization and Extensions*, Springer-Verlag, 1995.
- [7] Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, 1986.