OR メモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識（手法，原理），それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた智恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，“新鮮に”，しかも“コンパクトに”表現し，提示していただくものです．ふるってご投稿ください．（原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！　加筆訂正をお願いする場合があります）

相補スラック定理から入ってみたら

松井　知己

線形計画の授業で，双対定理の証明をするかどうかは，授業の組立てで重要な問題である．双対定理の証明には，Farkasの補題を使うか単体法の収束を用いる事が多いが，どちらも厳密に証明するのは，非常に時間がかかる．いっそ証明は全て諦めてしまうのも手だが，定理の美しさが伝わらないのが口惜しい．そこで「双対定理の証明は諦めて，相補性から入ったらどうだろう」と考えた．本稿では，2変数の線形計画問題に対し，力学モデルを用いた相補スラック定理の解釈を試みる．

本稿では以下のような線形計画について議論する．

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P:} & \mathrm{min.} & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ & \mathrm{s.t.} & \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} \geq b_j \ (j=1,2,\ldots,m). \end{array}$$

ただし，各制約式を適当に定数倍することにより，ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ の長さはすべて1となっていると仮定する．図1は，問題Pを図示したものとする．制約式の不等式の方向から分かるように，ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ は，$\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} \leq b_j$ の境界の超平面と直交し，許容領域方向を向いているベクトルである．問題Pの双対問題は，

$$\begin{array}{lll} \mathrm{D:} & \mathrm{max.} & \sum_{j=1}^m b_j y_j \\ & \mathrm{s.t.} & \sum_{j=1}^m y_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{c}, \\ & & y_j \geq 0 \ (j=1,2,\ldots,m), \end{array}$$

であり，相補スラック条件は以下のようになる

(1) $y_j > 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} = b_j$,

(2) $\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} > b_j \quad \rightarrow \quad y_j = 0$.

ここで図2のような，構造物を考えよう．制約式のところに壁を置き，目的関数方向が最急降下方向になるように，板を傾けた物である．この壁の中で十分小さな玉を転がすと，日常的な経験から玉は問題Pの最小点で留まることが分かるだろう．最小点で静止した玉のつりあいの式を考えよう．制約 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \geq b_j$ の壁が玉を押す力を y_j とすると，玉を斜面に沿って下に引っ張る力が $-\boldsymbol{c}$ であることから，つりあいの式は $-\boldsymbol{c} + \sum_{j=1}^m y_j \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{o}$ となる．これは双対問題の等式制約に他ならない．壁の押す力は抗力であるから（壁は玉を引っ張ることは出来ないから）$y_j \geq 0$ でなければならない．これで双対問題の制約式はすべて出現した．最後に相補条件を解釈しよう．(1) 玉を押している（$y_j > 0$ である）壁は，玉に接触していなければならない，すなわち玉の位置を $\boldsymbol{x}$ とすれば $\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} = b_j$ である．(2) 玉と接触していない壁（$\boldsymbol{a}_j^\top \boldsymbol{x} > b_j$ を満たしている壁）は玉を押すことは出来ない，すなわち $y_j = 0$ である．

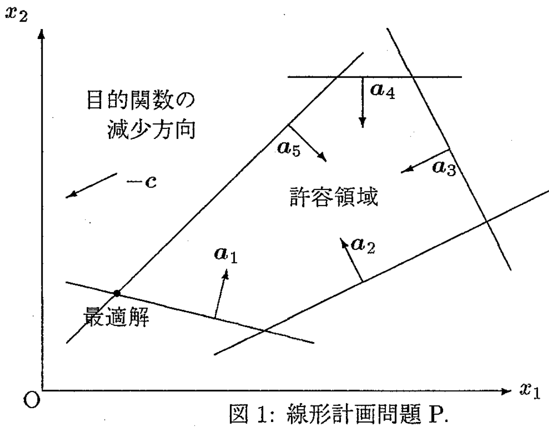

図1: 線形計画問題P.

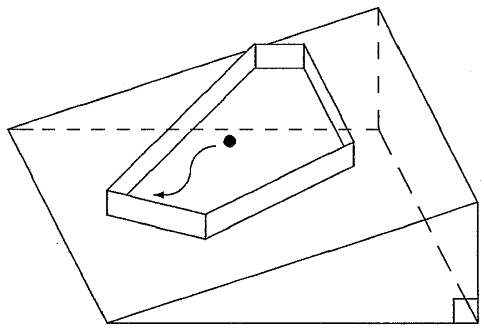

図2: 構造物.

上記の解釈は，工学部の授業ではそれなりに受け入れられるのだが，経済学部の授業では，残念ながら受けなかった．力学を出した時点で敬遠されてしまうようだ．

まつい ともみ　東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1
URL: http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．