

2×n 型双行列ゲームの Nash 均衡点を求める図解法

松井 知己

本稿では、2人非ゼロ和ゲーム（双行列ゲーム）の中で、特に2×n型双行列ゲームの Nash 均衡点を求める図解法についてまとめる。この図解法により、2×n型双行列ゲームには Nash 均衡点が存在する事が把握でき、奇数定理の直感的な理解も可能となる。

ゲーム理論の基礎を学ぶ（教える）際に、最初に出てくるのが戦略型2人ゲームであるのは、近年でも変わらない傾向だろう。また、Nash 均衡点についてそこで初めて触れるようになっている事が多い。2人ゼロ和ゲームにおける Nash 均衡点の存在は、線形計画法の双対定理を通した理解も可能であり、また帰納法による（ある程度）簡単な証明もある。ところが、囚人のジレンマ等の重要なゲームを含む2人非ゼロ和ゲーム（双行列ゲーム）については、Nash 均衡点の存在証明には不動点定理が必要となる。以下では、Nash 均衡点の存在性を直感的に把握できる図を提案しよう。

いくつかの本では、2×2型双行列ゲームの例で、図示を試みている（ほら、卍型のあの絵ですよ！）。しかし2×2型では、ゲームの種類が限られてしまっている。そこで、2×n型くらいを、なんとか図示したい。

以下では $n = 4$ の2×4型双行列ゲームの例を使って話を進める。プレイヤーは s と t の2人とする。プレイヤー s は5つの純粋戦略 $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ を持ち、プレイヤー t は2つの純粋戦略 $\{T_1, T_2\}$ を持つとする。2人のプレイヤーの利得行列は表1, 2の例を用いる。

以下では、プレイヤー t が戦略 (T_1, T_2) をそれぞれ確率 $(p, 1-p)$ で選択する混合戦略を採用しているとする。そのときのプレイヤー s の最適反応戦略は、図1で表される。詳しくは、以下のようにになっている。図中の直線 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 はプレイヤー s が対応する純粋戦略を選択したときに得られる期待利得を表している。例えば

まついともみ 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1
URL: <http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~tomomi/>

表1: プレイヤー s の利得行列

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
T_1	50	80	100	140	40
T_2	140	125	100	20	100

表2: プレイヤー t の利得行列

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
T_1	3	2	12	6	11
T_2	1	7	9	15	14

$0 \leq p < 1/3$ ならば、プレイヤー s は S_1 を採用するのが最も期待利得が大きくなる。また $1/3 < p < 5/9$ ならば、プレイヤー s は S_2 を採用するのが最も期待利得が大きくなる。特に $p = 1/3$ の時は、0以上1以下の任意の値 q について、プレイヤー s は (S_1, S_2) の2つの戦略を $(q, 1-q)$ の確率で選択する混合戦略を採用するのが最も期待利得が大きくなる。ゆえに、図1において4本の直線の上側を持ってきた折れ線 ABCDE が、プレイヤー s にとって最も期待利得が大きい、すなわち最適反応戦略となっている。戦略 S_5 が最適反応戦略となる事は無い。まとめると、以下の表になる。

表3: プレイヤー s の最適反応戦略

p	$[0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$	$\frac{5}{9}$	$(\frac{5}{9}, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}, 1]$
	S_1	S_1, S_2	S_2	S_2, S_3	S_3	S_3, S_4	S_4

Nash 均衡点は、2人のプレイヤーが相手の戦略の最適反応戦略を採用している（混合）戦略の対である。ゆえに、Nash 均衡点におけるプレイヤー s は、上記の表に現れる（混合）戦略のどれかを採用している。例えば S_1 と S_4 を用いた混合戦略は、表3中に存在しない事から、Nash 均衡点にはなり得ない。

では次に、プレイヤー t の最適反応戦略を議論しよう。図2は以下のように描かれる。まず S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 に対し t が T_1 (T_2) を採用したときの利得（表2参照）を

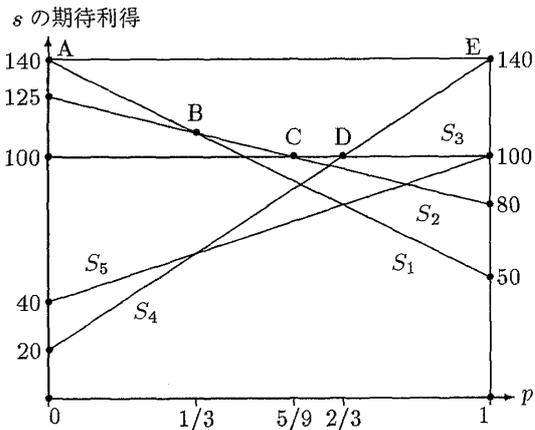


図1: プレイヤーsの最適反応戦略

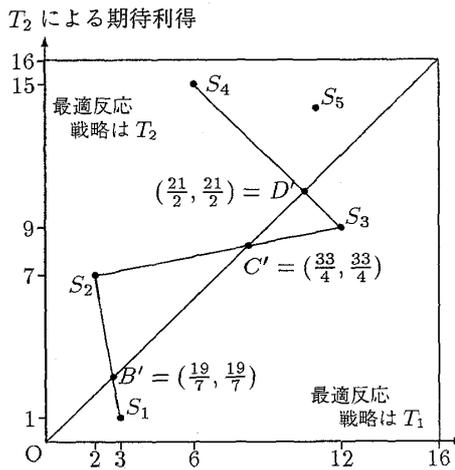


図2: プレイヤーtの最適反応戦略

座標とする点を記入する。

プレイヤーtが T_2 を採用する($p = 0$)とき、sの最適反応戦略は S_1 である。プレイヤーsが戦略 S_1 を採用したときは、tの利得は T_1 (T_2)を採用すると3(1)となる。点(3,1)が図2において、斜め45度の線より下にあることから、tの最適反応戦略は T_1 (すなわち $p = 1$)となる。これより $p = 0$ となるNash均衡点はない。もしtが T_1 を採用する($p = 1$)ならば、プレイヤーsの最適反応戦略は S_4 であり、点(6,15)が図2において、斜め45度の線より上にあることから、プレイヤーtの S_2 に対する最適反応戦略は T_2 、すなわち $p = 0$ となる。ゆえに、 $p = 1$ を満たすNash均衡点は存在しない。

次に表3に出現するsの戦略の順に従い、図2中に折れ線 $S_1S_2S_3S_4$ を引く。上記の例では、 S_1 が右下に S_4 が左上にあることから、 S_1 から S_4 への折れ線は必ず斜め45度の線を通る。実は、斜め45度の線上の点は、Nash均衡点となる。以下で、これを簡単に説明しよう。

図2中の4点 S_1, S_2, S_3, S_4 の、任意の点对の内分点の

座標は、sが内分比に従う混合戦略を採用した際に、tが T_1 (T_2)を採用した時のtの期待利得を表している。図2において斜め45度の線より下(上)にあるときは、tの最適反応戦略は T_1 (T_2)になる。斜め45度線上では、 T_1 と T_2 の任意の混合戦略が、最適反応戦略となる。

例えば点B'の座標(19/7, 19/7)は、sが (S_1, S_2) を(5/7, 2/7)で選択する混合戦略である。tが T_1, T_2 どちらを採用しても期待利得が19/7であることから、tの任意の混合戦略が、最適反応戦略となる。これより、Nash均衡点が1つ見つかる。プレイヤーtが $p = 1/3$ を採用するとき、sの最適反応戦略は (S_1, S_2) の混合戦略すべてであった。プレイヤーsが (S_1, S_2) を(5/7, 2/7)で選択する混合戦略(B')は、点B'が45度線上に存在することから、任意の $p \in [0, 1]$ がtの最適反応戦略になる。ゆえに「 (T_1, T_2) を(1/3, 2/3)で選択する混合戦略($p = 1/3$)と、 (S_1, S_2) を(5/7, 2/7)で選択する混合戦略の組」はNash均衡点となる。

点C'は (S_2, S_3) を(3/8, 5/8)で選択する混合戦略、点D'は (S_3, S_4) を(3/4, 1/4)で選択する混合戦略である。以上と同様の議論により、「 (T_1, T_2) を(5/9, 4/9)で選択する混合戦略($p = 5/9$)と、 (S_2, S_3) を(3/8, 5/8)で選択する混合戦略の組」および「 (T_1, T_2) を(2/3, 1/3)で選択する混合戦略($p = 2/3$)と、 (S_3, S_4) を(3/4, 1/4)で選択する混合戦略の組」はNash均衡点となる。

上記では、折れ線が45度の線と交わる点にNash均衡点に対応することから、Nash均衡点の個数が奇数(3個)になる。図2において点 S_4 が45度線より下にあつたら、どうなるのか?そのときは点D'とそれに対応するNash均衡点が消失するかわり、「tが T_1 を($p = 1$)を選択し、sが S_4 を選択する組」というNash均衡点が出現し、Nash均衡点の数は依然として3つである。

上記の図解法から、ゲームの変形に対してNash均衡点の集合を保持する事の難しさを、直感的に把握することもできる。例えば、図2において S_2 の点を連続的に移動させても、 S_2 が45度の線を越えたところでB'とC'の点に対応するNash均衡点が1つに合わり、そして消失するという、不連続な状況が起こる。あるいは、純粋戦略 S_3 を消去したとき、Nash均衡点C', D'は消失し、Nash均衡点はB'のみとなる。さらに、利得行列の連続的な変形や、純粋戦略の追加や削除によって、Nash均衡点が出現あるいは消失する例も容易に作る事が出来る。これらの事実を 2×2 型の双行列ゲームで把握することは容易ではない。