

D. C. optimization in robust control synthesis

H. D. Tuan, 細江 繁幸, P. Apkarian

1. はじめに

ロバスト制御理論はここ10年間で著しく発展し、産業の多くの分野で応用されている。この制御の目標は、測定誤差や外乱、あるいは制御系のモデリングの際に無視されたダイナミクスの影響など、さまざま不確かさのもとでも、制御系の安定性と制御性能を保持することである。

このためロバスト制御理論では、不確かさそのものをシステムモデルの一部として組み込み、制御系設計がなされる。この方法は色々あるが、たとえば図1に示した線形分数表現 (LFT) システムがその一例である。図中の Δ で示された部分が不確かさを表す。

本解説では、ロバスト制御問題と非線型関数の大域的最小化問題との関連について述べ、代表的なロバスト制御問題がd.c.制約 (凸関数の差で表される制約) の下での凸関数の大域的最小化問題、あるいは凸線形行列不等式 (LMI) 制約の下での非凸関数の最小化問題に帰着できることを示す。d.c.最適化問題は、最近、非凸大域的最適化問題として盛んに研究が進められ、有望視されている領域である。また、ロバスト制御問題におけるd.c.最適化問題は、比較的少数の変数 (複雑化変数) を固定すると凸問題になる特徴を持つ。すなわち、[6, 11]の用語に従えば問題の次元と比べ非凸度は低い。したがって、これらの特徴をうまく使うと、たとえば複雑化変数だけで分枝を行うような効率的な分枝限定法 (BB) を導くことができる。

H.D. Tuan, ほそえ しげゆき 名古屋大学工学部電子機械専攻 〒464-8603 名古屋市千種区不老町

P. Apkarian ONERA-CERT, 2 av. Edouard Belin, 31055 Toulouse, France

2. 非凸性ランクの低いd.c.最適化問題

2.1 非凸関数の凸集合上での最小化

非凸性ランクの低い一般的なd.c.最適化問題は次のように与えられる:

$$(P) \quad \min\{\omega(x, y) \mid (x, y) \in F \subset R^m \times R^n\}$$

ただし F は凸集合、 $\omega(x, y)$ は非凸関数で、 x を固定すると (y について) 凸関数になる。すなわち、 $x = (x_1, \dots, x_m)'$ が複雑化変数である。(P) を解くためのBB法は以下の2つの基本操作からなる。:

1. 分枝: 複雑化変数 $x = (x_1, \dots, x_m)$ の空間を有限個の凸集合 (たとえば多面体) に分割する。繰り返しの各段階で、設定された規則に従って分割集合のうちの1つ M を選び、それをさらに分割する。
2. 限定: 分割集合の1つ M が与えられたとき、次式を満たす数 $\beta(M)$ を求める。

$$\beta(M) \leq \omega(M) := \inf\{\omega(x, y) \mid (x, y) \in F_M\}, \quad (1)$$

ここで $F_M = \{(x, y) \in F \mid x \in M\}$. 一般的な限定法は、 M 上での $\omega(x, y)$ に対する凸な下界関数、すなわち

$$\psi_M(x, y) \leq \omega(x, y) \forall y, x \in M. \quad (2)$$

を満たす凸関数 $\psi_M(x, y)$ を求めることである。これにより、 $\beta(M)$ は凸計画問題

$$\min\{\psi_M(x, y) \mid (x, y) \in F_M\} \quad (3)$$

を解いて直ちに求めることができる。

繰り返しの各段階 κ で可能解を求め、それらを含めてこれまで求められた可能解の中で最小の ω 値を与える解を定める。これが κ 段階目の最良解である。以下、 ω の最小値をcbv (current best value)、解をcbs (current best solution) と記す。このとき、もしもこのcbvよりも $\beta(M)$ が大きいような分割集合 M があれば、それらの集合上の可能解の ω 値はすべてcbvより大であるので、今後の探索からはその集合を取り除

くことができる。一方、cbv よりも小さな $\beta(M)$ をあたえる分割 M に対しては、 $\beta(M)$ が最小である分割 M_κ を次の探索領域として選ぶのがもっとも有望である。したがってこれをさらに分割し分枝限定を進める。このとき分枝限定は収束条件、 $\kappa \rightarrow +\infty$ のとき $\omega(M_\kappa) - \beta(M_\kappa) \rightarrow 0$ 、を満たす必要がある。普通、 $\varepsilon > 0$ が与えられたとき、この差が ε より小となったら BB アルゴリズムを止める。

BB アルゴリズムの収束性は $\beta(M)$ の決め方によって大きく影響される。もちろん、 $\psi_M(x, y)$ が $\omega(x, y)$ に対するより正確な近似であるほど、 $\beta(M_\kappa)$ が $\omega(M_\kappa)$ により近く、したがって ε 近似解を得るに必要な繰り返しの回数も少なくてすむ。

収束速度を決めるもう 1 つの重要な要素は集合の分割方法である。多くの場合、繰り返しの過程で得られる情報をもとに適応的に分割を変える手法を適用すると、大きく収束を改善できることがある。

ロバスト制御問題では、関数 $\omega(x, y)$ は次の形であることが多い。

$$\omega(x, y) = f_1(y) + f_2(x) \quad (4)$$

ただし、 f_1 は凸、 f_2 は凹関数を表す。このような場合には、[6, 11] で提案されている単体を用いたアルゴリズムが適用できる。すなわち、 $M \subset R^m$ は単体とし、その頂点が u^1, u^2, \dots, u^{m+1} であるとする、(2) 式を満たす関数 $\psi_M(x, y)$ は

$$\psi_M(x, y) = f_1(y) + \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f_2(u^i) \quad (5)$$

ただし

$$x \in M \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i u^i, \quad \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0,$$

$$(x, y) \in F_M \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i u^i, y \right) \in F$$

で与えられる。

また、(4) 式の関数 $f_2(x)$ が変数 x_i に関して分離可能で凹、すなわち

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^m f_{2i}(x_i) \quad (6)$$

となることがしばしばある。ただし、 f_{2i} 、 $i = 1, \dots, m$ は凹関数である。この場合には、単体による分割アルゴリズムよりも直方体分割の方が有効である。すなわち、任意の直方体 $M = [p, q] \subset R^m$ に対して、(2) 式を満たす凸下界関数は

$$\psi_M(x, y) = f_1(y) + \sum_{i=1}^m [f_{2i}(p_i) + \frac{f_{2i}(q_i) - f_{2i}(p_i)}{q_i - p_i} (x_i - p_i)] \quad (7)$$

で与えられる。

さて $(x(M), y(M))$ を (3) の最小解とする。もし、これの ω 値が前の cbv よりも小ならば $\omega(x(M), y(M))$ が新しい cbs になる。さらに、 $\psi_M(x(M), y(M)) = \omega(x(M), y(M))$ であれば (たとえば $x_i(M) \in \{p_i, q_i\} \forall i$ となる)、 $\beta(M)$ は M 上での (P) の真の最小値であり、したがって繰り返しにおける M の選び方から (P) の大域的な最小値となる。よって、一般の (4) 式の場合には ω -分割法 [11] を利用し、とくに $f_2(x)$ が (6) 式で与えられる場合には次の改良された方法を用いることができる。

Adaptive subdivision rule. $M = [p, q]$ であるとき

$$i_M \in \arg \max_{i=1,2,\dots,m} [f_{2i}(x_i(M)) - \psi_{2iM}(x_i(M))] \quad (8)$$

とし、直線 $x_{i_M} = x_{i_M}(M)$ によって M を 2 つの直方体に分けよ。

2.2 非凸集合上の凸関数の最小化

この節では前節とは対称的に、 $\omega(x, y)$ は線形関数で、拘束条件 $(x, y) \in F$ が非線型である場合に、(P) の最小化問題を考える。

ここでも、 $(x, y) \in F$ は x を固定したとき y に関して凸、すなわち、変数 $x = (x_1, \dots, x_m)'$ が複雑化変数とする。たとえば

$$F = C \cap D \quad (9)$$

で、 C が LMI で記述される凸集合、 D が次のような非凸集合で与えられる場合である。

$$D = \{(x, y) : \bar{f}_1(y) + \bar{f}_2(x) \leq 0\} \quad (10)$$

ただし f_1 は凸関数、 f_2 は凹関数。

このような問題に対する BB アルゴリズムの展開には、与えられた分割集合 M に対して (1) 式を満たす $\beta(M)$ を計算する必要がある。このための 1 つの一般的な方法は

$$H_M \supset F_M := \{(x, y) \in F \mid x \in M\}, \quad (11)$$

を満たす凸集合 H_M 、たとえば

$$H_M := C \cap \text{conv}\{(x, y) \mid (x, y) \in D, x \in M\} \quad (12)$$

を求め、次の凸問題の最適値 $\beta(M)$ を計算する方法である。

$$\min\{\omega(x, y) \mid (x, y) \in H_M\}. \quad (13)$$

このとき、 $\beta(M)$ は $\omega(x, y)$ の F_M 上での下限、すなわち、(1)式を満たす。

拘束集合を近似凸集合で置き換えたことにより、最適解 $(x(M), y(M))$ は必ずしも可能解とはならないことに注意する必要がある。可能解は次の最小化問題を解いて得られる。

$$\min\{\omega(x(M), y) : (x(M), y) \in F_M\}. \quad (14)$$

これは、 x が一定値 $x(M)$ に固定されているので凸問題である。

前の節で述べた単体あるいは直方体分割はこの場合にも適用可能である。

集合 F が(9)-(10)式の形で与えられ、かつ、任意の直方体 $M = [p, q]$ に対して $f_2(x)$ が(6)式のように変数ごとに分離した凹関数であるなら、(11)式を満たす集合 H_M は次のようにとることができる。

$$H_M = C \cap \{(x, y) : \psi_M(x, y) \leq 0, x \in M\} \quad (15)$$

$\psi_M(x, y)$ は(7)式で f_1, f_2 の代わりに \bar{f}_1, \bar{f}_2 を用いて与えられる。

2.3 一般的なBB計算法

さて、以上でd.c. 最適化問題とそれに関連する分枝限定法についての一般的な概念の説明は終了した。これらを元にして、許容量 $\epsilon (> 0)$ が与えられたとき、(P)の大域的な最適解を求める次のBB計算法が得られる。

BB 計算法 (BBS)

初期化: 複雑化変数 x の定義域を含んだ単体あるいは多面体 (単体や直方体) の集まり \mathcal{N}_1 から開始する。 $S_1 = \mathcal{N}_1$, $\kappa = 1$ とおく。

Step 1. すべての $M \in \mathcal{N}_\kappa$ に対して、(3)式または(13)式の問題を解き、 $\beta(M)$ と分割 M における最適解 $(x(M), y(M))$ を求める。 $cbv(x^\kappa, y^\kappa)$ を次のように定義する。 F が凸であるときには、すべての可能解 $(x(M), y(M)), M \in \mathcal{N}_\kappa$ の中で最小の ω 値を与えるものを求め、これが前段の cbv より小なら、 (x^κ, y^κ) を更新する。 F が凸でない場合には、 (x^κ, y^κ) の最小化問題の解を用いて同じ事を行う。

Step 2. S_κ のうち、 $\beta(M) > \omega(x^\kappa, y^\kappa) - \epsilon$ であるような M はすべて削除する。残った集合を \mathcal{R}_κ とする。もし $\mathcal{R}_\kappa = \emptyset$ であるなら、終了。 (x^κ, y^κ) が最適解。

Step 3. 前述の分割法の1つを

$M_\kappa \in \operatorname{argmin}\{\beta(M) \mid M \in \mathcal{R}_\kappa\}$ に適用し、多面体 $M_{\kappa,1}, M_{\kappa,2}, \dots, M_{\kappa,\ell}$ に分割する。 $\mathcal{N}_{\kappa+1} = \{M_{\kappa,1}, M_{\kappa,2}, \dots, M_{\kappa,\ell}\}$, $S_{\kappa+1} = (\mathcal{R}_\kappa \setminus M_\kappa) \cup \mathcal{N}_{\kappa+1}$ とおく。

$\kappa \leftarrow \kappa + 1$ として Step 1 に戻る。

3. 制御問題におけるd.c.構造と解法

3.1 問題の定式化

図1のフィードバックシステムについて考える。図中、 G はノミナルプラント、 Δ はその不確かさを表し

$$\Delta(t) = \operatorname{diag}(\delta_1(t)I, \dots, \delta_i(t)I, \Delta_1(t), \dots, \Delta_j(t)) \quad (16)$$

で与えられる。この構造を以下では Ξ で表す。また、 u は制御入力、 w は外生信号、 z は被制御量、 y は観測信号を表す。

ロバスト制御の基本問題はロバストパフォーマンス問題 (RPP) と呼ばれる [13] 以下の条件を満足する制御器 $y = K(u)$ を求めることである。

- 閉ループ系は次式を満たす任意の不確かさ Δ に対して安定。 $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq I, \quad t \geq 0$
- $\gamma > 0$ が与えられたとき、 w から z への L_2 誘導ノルムが γ 未満。すなわち $\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2$ 。

最適ロバストパフォーマンス問題 (ORPP) はRPPが可解である最小の $\gamma > 0$ を求める問題をいう。また、誘導ノルムの条件は考えず、たんに不確かさ $\Delta(t)$ の下での安定化を考える問題はロバスト安定化問題 RSP と呼ばれている。

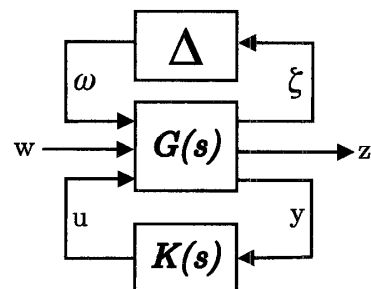


図1 the feedback system

以下では、図1のシステムを次の状態方程式で表す。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \zeta \\ z \\ y \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_1 & B_2 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & B_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\Delta} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\omega = \Delta(t)\zeta,$$

また、RPP の解を導出するために、 Δ の構造に応じて以下のスケーリング行列の集合を用意する。

$$S_\Xi = \text{diag}[S_1, \dots, S_i, s_1 I, \dots, s_j I], \quad (18)$$

$$T_\Xi = \text{diag}[T_1, \dots, T_i, 0, \dots, 0] \quad (19)$$

ここで S_i は正定行列であり、 T_i は歪対称行列 ($T_i = -T_i^T$) である。

以上の準備の下で、 \mathcal{H}_∞ 制御の線形行列不等式 LMI による解法 [1] を適用し、さらに行列の計算を行うと次の結果を導くことができる [2]。

Theorem 1

\mathcal{N}_X および \mathcal{N}_Y をそれぞれ行列 $[C_2, D_{2\Delta}, D_{21}, 0]$ および $[B_2^T, D_{\Delta 2}^T, D_{12}^T, 0]$ の零空間の任意の基底とする。このとき、RPP が可解である必要十分条件は以下の拘束条件を満たす対称行列の対 (X, Y) 、 (S, Σ) および歪対称行列の対 (T, Γ) が存在することである。

$$(i) \quad S, \Sigma \in S_\Xi \text{ かつ } T, \Gamma \in T_\Xi. \quad (20)$$

(ii) 次の拘束条件付 LMI が可解。

$$\mathcal{N}_X' \begin{bmatrix} L_{11}(X, S, T) & L_{12}(X, S, T) \\ L_{12}^T(X, S, T) & L_{22}(S, \gamma) \end{bmatrix} \mathcal{N}_X < 0 \quad (21)$$

$$\mathcal{N}_Y' \begin{bmatrix} Q_{11}(Y, S, T) & Q_{12}(Y, \Sigma, \Gamma) \\ Q_{12}^T(Y, \Sigma, \Gamma) & Q_{22}(\Sigma, \gamma) \end{bmatrix} \mathcal{N}_Y < 0 \quad (22)$$

$$- \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} < 0 \quad (23)$$

$$- \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \Sigma \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

拘束条件

$$(S + T)^{-1} = (\Sigma + \Gamma). \quad (25)$$

ここで、各行列は以下で与えられる。

$$L_{11}(X, S, T) = \begin{bmatrix} A^T X + X A & X B_\Delta + C_\Delta^T T^T \\ B_\Delta^T X + T C_\Delta & -S + T D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta\Delta}^T T^T \end{bmatrix},$$

$$L_{12}(X, S, T) = \begin{bmatrix} X B_1 & C_\Delta^T S & C_1^T \\ T B_{\Delta 1} & D_{\Delta\Delta}^T S & D_{1\Delta}^T \end{bmatrix},$$

$$L_{22}(S, \gamma) = \begin{bmatrix} -\gamma I & B_{\Delta 1}^T S & D_{11}^T \\ S B_{\Delta 1} & -S & 0 \\ D_{11} & 0 & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$Q_{11}(Y, \Sigma, \Gamma) = \begin{bmatrix} A Y + Y A^T & Y C_\Delta^T + B_\Delta \Gamma^T \\ C_\Delta Y + \Gamma B_\Delta^T & -\Sigma + \Gamma D_{\Delta\Delta}^T + D_{\Delta\Delta} \Gamma^T \end{bmatrix},$$

$$Q_{12}(Y, \Sigma, \Gamma) = \begin{bmatrix} Y C_1^T & B_\Delta \Sigma & B_1^T \\ \Gamma D_{1\Delta}^T & D_{\Delta\Delta} \Sigma & B_{\Delta 1}^T \end{bmatrix},$$

$$Q_{22}(\Sigma, \gamma) = \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{1\Delta} \Sigma & D_{11} \\ \Sigma D_{1\Delta}^T & -\Sigma & 0 \\ D_{11}^T & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}.$$

3.2 一般の Ξ の場合の d.c. 構造

(21)-(25) 式の拘束条件付 LMI は、次の補題を用いると、 f が (4) 式の形である場合の問題 (P) に変換される [2]。

Lemma 1 (21)-(25) 式の拘束条件付 LMI が可解である必要十分条件は以下に述べる問題 **PB** が最小値 0 を持つことである。

$$\mathbf{PB:} \quad \text{minimize } \text{Tr}(Z_1 - Z_3 Z_2^{-1} Z_3^T) \quad (26)$$

under LMI (21) – (24) and

$$- \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 & S + T & I \\ Z_3^T & Z_2 & I & \Sigma + \Gamma \\ (S + T)^T & I & I & 0 \\ I & (\Sigma + \Gamma)^T & 0 & I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (27)$$

(Z_1, Z_2, Z_3) が (21)-(24), (27) 式に対する可能解であるとき、 $Z_2 > 0$ であることに注意しよう。また、 $x = (Z_2, Z_3), y = Z_1, f_1(y) = \text{Tr}(y), f_2(x) = -\text{Tr}(Z_3 Z_2^{-1} Z_3^T)$ とおくと、目的関数 (26) は (4) 式の形であり、拘束集合 (21)-(24), (27) の上で $f_1(y)$ は凸、 $f_2(x)$ は凹関数になっていることを簡単に示すことができる。さらに、 $F = \{(Z_1, Z_2, Z_3) : \exists(X, Y, S, \Sigma, T, \Gamma) \text{ s.t. (21) – (24), (27)}\}$ は凸の LMI 拘束である。したがって前節の BBS を用いて **PB** を解くことができる。詳細は [2] を見られたい。同様にして ORPP も次のような d.c. 問題に帰着できる。

$$\min \gamma : \quad (21) - (24), (27) \quad (28)$$

$$\text{Tr}(Z_1 - Z_3 Z_2^{-1} Z_3^T) \leq 0 \quad (29)$$

ただし、この場合非凸である変数 (Z_2, Z_3) の次元が高いため BBS を直接適用することは多くの場合得策ではない。 γ_{opt} の探索は 2 分割法を用いたほうが実際的である。

3.3 対角スケーリングの場合の分離構造

(16)式で $i=0$ であるとき、すなわち、不確かさを表す部分行列がすべてフルブロックであるとき、(18)-(19)式からわかるように歪対称行列の部分はなく

$$S = \text{diag}[x_1 I, \dots, x_j I], \Sigma = \text{diag}[y_1 I, \dots, y_j I]$$

となる。

このとき、(25), (24)式はそれぞれ

$$-\begin{bmatrix} S & I \\ I & \Sigma \end{bmatrix} \leq 0 \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^j y_i - \sum_{i=1}^j \frac{1}{x_j} \leq 0 \quad (31)$$

と等価であることが示される [8]。(30)式は、さらに

$$\omega(x, y) := \sum_{i=1}^j y_i - \sum_{i=1}^j \frac{1}{x_j} \geq 0 \quad (32)$$

と書きかえられる。したがって、RPP ((21), (22), (23), (30), (31)) は次の大域的最適化問題の最小値が 0 となることと等価である。

$$\min \omega(x, y) : (21), (22), (23), (30). \quad (33)$$

明らかに (33) は $\omega(x, y)$ が (4), (6)式の形で、 $f_{2i} = -1/x_i, j = m$ とおいた場合に対応する。したがって、直方体分割を用い、下界凸関数として (7)式を用いた BBS を適用することができる。

一方、ORPP はこの場合は次の最適化問題になる。

$$\min \gamma : \gamma > 0, (21), (22), (23), (30), \omega(x, y) \leq 0. \quad (34)$$

これは、目的関数が $\omega(x, y) = \gamma$ なる線形関数で、 F が (9), (10)式の構造を持つ場合に対応する。普通、 x の次元はあまり大きくないので、2.2節で述べた BBS を用いて効率的に解くことができる。

最適スケーリング問題に対するその他の d.c. 最適化アルゴリズムについては [7]を参照されたい。

Remark. (34) 式の最小化問題については [12] で covering method が提案されている。本稿で紹介した方法との比較については [10]を参照されたい。

4. 応用例

図 2 のアーム駆動型倒立振り子 (ADIP) のロバスト制御について考えよう。図に示されているように倒立振り子は 2 つのリンクから構成されている。駆動源は第 1 リンク (アーム) 下部に取り付けられ、アームと第 2 リンク (倒立振り子) の間に駆動源はない。制御の主目的は、アームを任意に指定された角度だけ回転し、かつ、倒立振り子を垂直に保つことである。実験装置の詳細については文献 [5]を参照していただきたい。

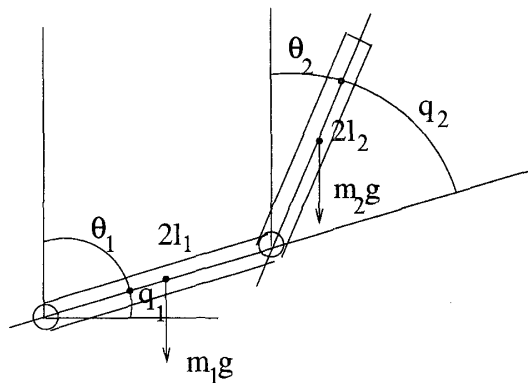


図 2 The inverted pendulum

ここで状態変数ベクトルを $x := [z \quad \dot{z} \quad r_x \quad \theta_1]^T$ ととる。ただし、 r_x はアーム先端の水平位置 (r_y は高さ)、 θ_1, θ_2 はそれぞれアームおよび振り子が垂直軸となす角度、 z は $z := r_x + \frac{4}{3}l_2 \sin \theta_2$ で与えられる。このとき、次式のような ADIP の LFT 状態空間表現が得られる [5]。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_\Delta w_\Delta + Bu \\ z_\Delta &= C_\Delta x \\ w_\Delta &= \Delta z_\Delta, \end{aligned} \quad (35)$$

ただし

$$\Delta := \begin{bmatrix} r_y & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

また、アームの駆動範囲が指定されれば、パラメータの大きさを基準化し $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2 I_2)$, $|\delta_i| \leq 1, i = 1, 2$ とできる。すなわち、 Δ の構造は (16)式で $i = j = 1$ とした場合である。したがって、本稿で解説したロバスト制御系の設計法が適用できる。

次ページの表はアルゴリズムの性能を繰り返しの回数と cpu 時間で示したものである。計算は CPU

γ	FWA		BBS	
	# iter.	cputime	# iter.	cputime
0.2	3	65.74 sec.	-	-
0.1910	10	148.03 sec.	-	-
0.1905	10	152.09 sec	-	-
0.1904	2	56.08 sec	-	-
0.1903	f	f	1	12.3 sec.
0.1838	-	-	2	84.80 sec.
0.18375	-	-	12(inf)	793.01 sec

表1 f: the test fails; inf: no zero optimal value (infeas.)

Pentium II 330 Mhz の PC 上で行った。LMI に関係した計算はすべて *LMI Control Toolbox* [4] を用いて行った。また、BBS を利用した計算は、始めに Frank と Wolf の局所最適化アルゴリズム (FWA) を使い、それが失敗した後で (ここでは $\gamma = 0.1903$) で適用した。記号 'f' は FWA では対応する γ 値が達成できなかったことを示す。いっぽう、記号 'inf' は与えられた γ に対しては可能解が存在しないことを示す。他の応用例については [8] を参照されたい。

5. おわりに

本稿では、ロバスト制御理論におけるいくつかの興味深い問題が d.c. 最適化問題のクラスに属することを述べた。すなわち、それらは LMI によって表される凸集合上での非凸関数の最小化、あるいは反対に、非凸拘束集合上での線形汎関数の最小化として定式化される。また、本稿では紙数の都合で述べなかったが、他の多く問題に対して同様な定式化ができる [3]。たとえば

- 低次元コントローラあるいは次元の指定されたコントローラ的设计
- 多目的ロバスト制御
- 高次システムの低次元近似
- 入力に飽和拘束がある場合のロバスト制御

などである。このことから、d.c. 最適化法はロバスト制御問題解法の広範な分野で重要な役割を果たすものと期待できる。また、d.c. 最適化法は本質的に

非常に困難な制御問題の大域的最適解を求める問題に対し、包括的な解決法を展開するための出発点としても有用である。

筆者らはここで紹介した方法を数多くの数値例に適用したが、いずれも結果は良好であり、非常に期待できるものであった。また、その際、良く知られている古典的な微分最適化法や組み合わせ非凸最適化の最近の結果を同時に用いることが有効であった。

参考文献

- [1] P. Apkarian, P. Gahinet, A Convex Characterization of Gain-Scheduled \mathcal{H}_∞ controllers, *IEEE Trans. Automatic Control* 40(1995), 853-864. See also pp. 1681.
- [2] P. Apkarian, H.D. Tuan, Robust control via concave minimization: local and global algorithms, *Proc. of CDC 1998*, also to appear in *IEEE Trans. Automatic Control*.
- [3] P. Apkarian, H.D. Tuan, Concave programming in control theory, to appear in *J. of Global Optimization*.
- [4] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, M. Chilali, *LMI control toolbox*, The Math. Works Inc., 1994.
- [5] H. Kajiwara, P. Apkarian, P. Gahinet, Wide-range stabilization of an arm-driven inverted pendulum using linear parameter-varying techniques, in *AIAA Guid., Nav. and Control Conf.*, Boston, 1998.
- [6] H. Konno, P.T. Thach, H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures*, Kluwer Academic, 1997.
- [7] H.D. Tuan, S. Hosoe, H. Tuy, D.C. optimization approach to robust controls: the optimal scaling value problem, *Proceedings of 1997 American Control Conference*, 350-355. Also to appear in *IEEE Trans. Automatic Control*.
- [8] H.D. Tuan, S. Hosoe, H. Tuy, Global optimization approach to robust controls: the robust performance problem, *Preprint 9602*, Dept. of Electronic-Mechanical Eng., Nagoya Univ., 1996.
- [9] H.D. Tuan, S. Hosoe, H. Tuy, New global optimization algorithms for solving the robust performance problem of robust controls, *Proceedings of 2-nd Asian Control Conference*, Vol. 1, 350-353.
- [10] H.D. Tuan, Remarks on a global optimization algorithm for \mathcal{H}_∞ control, To appear in *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [11] H. Tuy, *Convex analysis and global optimization*, Kluwer Academic Publisher 1998.
- [12] Y. Yamada, S. Hara, Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling, *IEEE Trans. on Automatic Controls* 43(1998), 191-203.
- [13] K. Zhou, J. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.