大域的最適化

—資産運用問題への応用を中心に—

今野　浩

1.　大域的最適化

大域的最適化（Global Optimization）という分野は，非線形計画法における「非凸型最小化問題」と，組合せ最適化における「NP 困難問題」の研究が合体してできたものということができるだろう．一見すると全く違う分野の組合せのように見えるが，実はこの両者は，「凹関数最小化問題」を媒介として深いつながりをもっているのである．

筆者は，1970年代のはじめ以来，約30年間にわたって非凸型最適化問題に取組んできたが，かつては不毛の地と見られたこの分野で，次々と大きな花が開き始めているのを眼にすると，誠に感無量なものがある．実際，この10年の間に，問題の特殊構造を利用した巧妙な解法がいくつも提案されているし，発表当初はtoy problem しか解けないと考えられていた解法が，予想外に効率的であることが判明したケースがいくつもある．パソコンの普及によって，いろいろなアイディアを即座に，かつ安価に試してみることができるようになったことが，この分野の発展の原動力となったのである．

しかし更に重要なのは，非凸型最適化問題の数学的構造に対する研究が，この10年で急速に進んだことである．非凸型問題に内在する凸構造を詳しく分析することによって，凹関数最小化，逆凸問題などに対する厳密かつ実用的な汎用解法が構成されているし，問題の特殊構造を利用することによって，これらの汎用解法の効率が著しく改善されたケースも少なくない．(なおより詳しいことは[1]を御覧頂きたい．)

大域的最適化の研究には，大きく分けて2つのタイプがある．1つは，問題の特別な性質を利用して，厳密かつ効率的な解法を構築するアプローチである．これは，難しい組合せ最適化問題（例えば巡回セールスマン問題）に汎用解法を適用すると効率が悪いので，問題の構造を利用した特殊解法を工夫するアプローチに代表されるものである．

これに対して，一般の問題を一般的に解くヒューリスティック解法—例えばシミュレーテッド・アニーリング法やタブ・サーチ法—に様々な工夫を施し，なるべく良い局所最適解を求めようとするアプローチがある．大域的最適解を求めるのは容易ではないので，満足すべき局所解をなるべく速く計算し，できれば解の精度，すなわち最適解からの離れ具合を定量的に示そうとするアプローチである．これらは互いに補完しあうものであるが，ここでは資産運用問題を例に取り，前者に属する解法をいくつか紹介することにしたい．

2.　取引コストと最小取引単位制約がある場合のポートフォリオ最適化

ポートフォリオ理論の基礎となるのは，マーコビッツの平均・分散モデルである[2]．このモデルは，ポートフォリオの期待収益率を一定として，分散で表されるリスクを最小化する問題，もしくはリスクを一定以下として，期待収益率を最大化する問題として定式化される．

n 種の資産 $S_1, \cdots, S_n$ の収益率を $R_1, \cdots, R_n$ とし，S_j への資金配分比率を x_j とすると，ポートフォリオ $x=(x_1, \cdots, x_n)$ の収益率 $R(x)$ は

$$R(x)=\sum_{j=1}^{n} R_j x_j, \tag{1}$$

で表わされる．$R(x)$ の期待値 $E[R(x)]$ と分散 $V[R(x)]$ はそれぞれ

$$E[R(x)]=E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]=\sum_{j=1}^{n} r_j x_j, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} V[R(x)]&=E[(R(x)-E[R(x)])^2] \\ &=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_j x_k, \end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで $r_j=E[R_j]$，$\sigma_{jk}=cov[R_j, R_k]$ である．

こんの　ひろし　東京工業大学大学院社会理工学研究科
〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1

これより平均・分散モデルは

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \\ \text{条件} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k \leq v, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ 0 \leq x_j \leq \alpha_j,\ j=1, \cdots, n, \end{array}\right. \tag{4}$$

と定式化される。ここで v と α_j, $j=1, \cdots, n$ は適当な定数であるものとする。

このモデルは，資産購入に当たって取引コストは存在しないこと，またどの資産も無限に分割できることを前提としている。ところが，実際には資産を購入する際には，各銘柄ごとに取引コストがかかる。何百億円という大きな資金を運用する場合には，これらの影響は軽微であろう。しかし，より小規模な資産を運用する際には，これを無視することはできない。

そこで，x_j に対応する取引コストを $c_j(x_j)$ とすると，問題(4)は

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} (r_j x_j - c_j(x_j)) \\ \text{条件} & \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk} x_j x_k \leq v, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ 0 \leq x_j \leq \alpha_j,\ j=1, \cdots, n, \end{array}\right. \tag{5}$$

と書きかえられる。取引コスト関数は，取引量が余り大きくないときには，図1のような凹関数となる。したがって，問題は非線形制約条件の下での凸関数最大化となる。

こんな問題は，仲々うまく解けない。そこで問題を取り扱い易くするため，リスク尺度を分散から絶対偏差に入れかえることにしよう。ポートフォリオ x の収益率 $R(x)$ の絶対偏差 $W(x)$ とは

$$W(x) = E[|R(x) - E[R(x)]|] \tag{6}$$

で定義される関数で，現在では，リスク指標として十分な市民権を持つ指標である[2]。

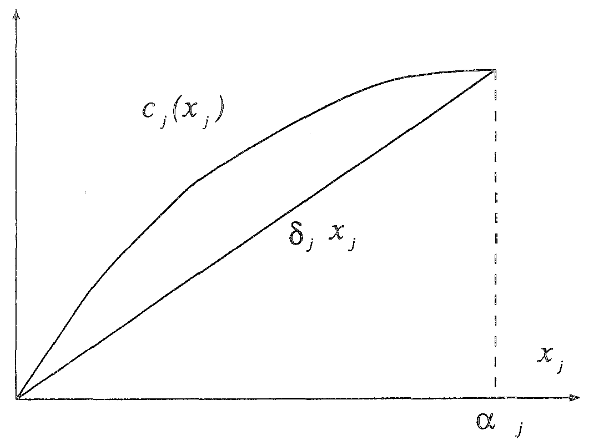

図1　凹型取り引きコスト

いま，$(R_1, \cdots, R_n)$ の取り得る値の集合を $\{(r_{1t}, \cdots, r_{nt}) | t=1, \cdots, T\}$ とし，これらの値が実現される確率を f_t, $t=1, \cdots, T$ とすると，$r_j = \sum_{j=1}^{n} f_t r_{jt}$ とおいて

$$W(x) = \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} f_t (r_{jt} - r_j) x_j \right|, \tag{7}$$

となる。よってこのとき問題は

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} (r_j x_j - c_j(x_j)) \\ \text{条件} & \sum_{t=1}^{T} \left| \sum_{j=1}^{n} f_t (r_{jt} - r_j) x_j \right| \leq w, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ 0 \leq x_j \leq \alpha_j,\ j=1, \cdots, n, \end{array}\right. \tag{8}$$

となる。w は問題(5)の v に対応する適当な定数である。ここで，

$$y_t = \left| \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \right|,\ t=1, \cdots, T,$$

とおくと，問題は1次式制約の下での凸関数最大化問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & f(x) = \sum_{j=1}^{n} (r_j x_j - c_j(x_j)) \\ \text{条件} & y_t - \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, \\ & y_t \geq 0,\ t=1, \cdots, T, \\ & \sum_{t=1}^{T} f_t y_t \leq w, \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ 0 \leq x_j \leq \alpha_j,\ j=1, \cdots, n, \end{array}\right. \tag{9}$$

となる[2]。そこで

$$F = \left\{ (x, y) | y_t - \sum_{j=1}^{n} (r_{jt} - r_j) x_j \geq 0, \right.$$
$$\left. y_t \geq 0,\ t=1, \cdots, T;\ \sum_{t=1}^{T} f_t y_t \leq w,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}, \tag{10}$$

とおき，図1のように $c_j(x_j)$ を下から近似する1次関数 $\delta_j x_j$ で置き換えた問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & g(x) = \sum_{j=1}^{n} (r_j x_j - \delta_j x_j) \\ \text{条件} & (x, y) \in F, \\ & 0 \leq x_j \leq \alpha_j,\ j=1, \cdots, n, \end{array}\right. \tag{11}$$

を考え，この問題の最適解を (x^0, y^0) としよう。すると制約領域 F の構造から，$0 < x_j^0 < \alpha_j$ となる j の数は，たかだか $T+1$ 個（ふつうの場合 $T/2$ 個以下）以下であることが示される。たとえば,$n=200$, $T=36$ のケースを想定すると，$0 < x_j^0 < \alpha_j$ となるのは，200銘柄中たかだか37銘柄以下（ふつうはこの半分程度）となるのである。

以下のプロセスでは，$x_j^0 = 0$ となっている変数を考慮の対象から外すことにしよう。凹型取り引きコスト

の下は，少量購入を行うことは割り高な取り引きコストをもたらす．したがって，問題(11)を解いた結果投資しないことになった資産が，最適ポートフォリオの中に含まれる可能性は少ないと考えられるためである．

ここで，問題(9)の最適解を x^* とすると

$$g(x^0) \geq f(x^*) \geq f(x^0), \tag{12}$$

となることに注意しよう．なぜなら，すべての x に対して $g(x) \geq f(x)$ で，しかも (x^0, y^0) は(9)の実行可能解だからである．これより，ある許容誤差限界 $\epsilon > 0$ に対して，条件

$$g(x^0) - f(x^0) \leq \epsilon, \tag{13}$$

が満たされていれば，x^0 が(9)の近似最適解となることが分かる．($x_j^0=0$，または $x_j^0=\alpha_j$ となっている変数については，$\delta_j x_j^0 = c_j(x_j^0)$ が成立していることに注意すると，T が小さいときには $g(x^0)$ と $f(x^0)$ の差は余り大きくないと予想される．) 一方，条件(13)が成立していないときは

$$c_s(x_s^0) - \delta_s x_s^0 = \max\{c_j(x_j^0) - \delta_j x_j^0 \mid j=1, \cdots, n\}, \tag{14}$$

となる s に対して，区間 $(0, \alpha_s)$ を図のように2つの部分区間 $[0, x_s^0], [x_s^0, \alpha_s]$ に分割する．

この結果，$\beta_j^1=0, \forall j; \alpha_j^1=\alpha_j, \forall j \neq s; \alpha_s^1 = x_s^0, \beta_j^2=0, \forall j \neq s; \beta_s^2 = x_s^0, \alpha_j^2=\alpha_j, \forall j$ とおくと，問題 (P) は次の2つの子問題：

$$(P_1) \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n}(r_j x_j - c_j(x_j)) \\ \text{条件} & (x, y) \in F, \\ & \beta_j^1 \leq x_j \leq \alpha_j^1, j=1, \cdots, n, \end{array} \right.$$

$$(P_2) \left| \begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{j=1}^{n}(r_j x_j - c_j(x_j)) \\ \text{条件} & (x, y) \in F, \\ & \beta_j^2 \leq x_j \leq \alpha_j^2, j=1, \cdots, n, \end{array} \right.$$

に分解される．問題 $(P_1), (P_2)$ は変数の上下限制約が違うだけで，あとはもとの問題と全く同じ構造をもっている．したがって，これらの問題に対しても，$c_j(x_j)$ を下方線形近似することによって，上で述べたのと同じプロセスを施すことができる．

以上より，問題 (P) に対して分枝限定法を構築することが出来ることが分かる．詳細は[4]を御覧頂くことにして，結論だけを述べれば，この方法は予想以上に効率的である．例えば $\epsilon=10^{-5}$ と設定すると，実用的な意味で最適解とみなして良い解を求めるために必要となる計算時間は，$n=200, T=36$ の場合，多くても約400秒程度，また生成される子問題の数は最大で30個程度である．

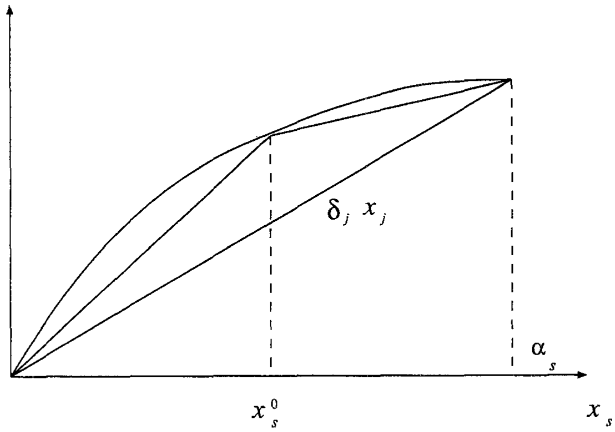

図2

3. 債券ポートフォリオ最適化と分数関数の和の最小化

1次関数の比を最小化する（線形）分数計画問題：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & (d^T x + d_0)/(c^T x + c_0) \\ \text{条件} & Ax = b, x \geq 0, \end{array} \right. \tag{15}$$

は，様々な分野に広い応用を持つ問題である．良く知られている通り，線形分数関数は準凸関数なので，局所最適解＝大域的最適解という性質をもっている．Charnes-Cooper はこの性質を利用して，この問題に対する極めて効率的な解法を提案している．

ところが2つの線形分数関数の和を最小化する問題：

$$\left| \begin{array}{ll} \text{最小化} & (d_1^T x + d_{10})/(c_1^T x + c_{10}) \\ & \quad +(d_2^T x + d_{20})/(c_2^T x + c_{20}) \\ \text{条件} & Ax = b, x \geq 0, \end{array} \right. \tag{16}$$

を考えると，目的関数は準凸関数とはならないので，この問題の大域的最適解を求めることは，(15)に比べて格段に難しくなる．

機関投資家が，債券ポートフォリオを評価する際には，収益の指標としては平均直利（クーポン収入とポートフォリオ価値の比率），リスクの尺度としては平均残存年数（ポートフォリオに含まれる債券1枚あたりの満期までの時間の長さ）などの指標が用いられる．これらの指標はいずれも線形分数関数として表現されるが，これらに関する多目的最適化を行う際に，問題(16)を解くことが必要となるのである．そこで以下では，パラメトリック単体法を用いた解法を紹介しよう．

第1ステップは次の変数変換

$$y_0 = 1/(c_2^T x + c_{20}),\ y = x y_0, \tag{17}$$

を行って，問題を

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & (d_1^T y + d_{10} y_0)/(c_1^T y + c_{10} y_0) \\ & \quad + (d_2^T y + d_{20} y_0) \\ \text{条件} & Ay - by_0 = 0, \\ & c_2^T y + c_{20} y_0 = 1, \\ & y \geq 0,\ y_0 \geq 0, \end{array}\right. \tag{18}$$

と書き直すことである．ここで

$$\xi = c_1^T y + c_{10} y_0, \tag{19}$$

$$Y = \{Ay - by_0 = 0,\ c_2^T y + c_{20} y_0 = 1,\ y \geq 0,\ y_0 \geq 0\}, \tag{20}$$

とおいて，Y 上での ξ の最大値と最小値をそれぞれ $\xi_{\min}, \xi_{\max}$ しよう．すると，問題(18)は

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & (d_1^T y + d_{10} y_0)/\xi + (d_2^T y + d_{20} y_0) \\ \text{条件} & (y, y_0) \in Y, \\ & c_1^T y + c_{10} y_0 = \xi, \\ & \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}, \end{array}\right. \tag{21}$$

と書き直すことが出来る．問題(21)で ξ の値を固定した問題：

$$P(\xi)\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & (d_1^T y + d_{10} y_0)/\xi + (d_2^T y + d_{20} y_0) \\ \text{条件} & (y, y_0) \in Y, \\ & c_1^T y + c_{10} y_0 = \xi, \end{array}\right. \tag{22}$$

は，ふつうの線形計画問題である．したがって，パラメータを含んだ線形計画問題の解法である（主・双対）パラメトリック単体法を使えば，すべての $\xi \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ に対して，問題 $P(\xi)$ の最適解 $(y(\xi), y_0(\xi))$ を“解析的”に，しかも効率的に計算することができるのである[2]．問題(18)の最適解を (y^*, y_0^*) とすると，定義式(17)から分かるとおり，$x^* = y^*/y_0^*$ がもとの問題(16)の最適解となる．

ファイナンスにおける大域的最適化問題としては，このほかにも，平均・分散・歪度モデル最適化，コンスタント・リバランスによる多期間資産運用最適化，金利の期間構造推定問題など様々なものがあるが，それらについては[2]，[3]などを参照して頂きたい．

4．*NP* 完全問題と平均多項式オーダーの解法

最後に面白い問題を１つ紹介しよう．問題というのは次の非凸型２次計画問題である．

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & (c_1^T x + c_{10})(d_1^T x + d_{10}) \\ \text{条件} & Ax = b,\ x \geq 0. \end{array}\right. \tag{23}$$

この問題は，線形乗法計画問題と呼ばれるもので，*NP*－困難であるにも拘わらず[5]，効率的な厳密解法を構築することが出来る問題の１つである．筆者が知る限り最も効率が良いのは，パラメトリック単体法によるものである．すなわち $\xi = c_2^T x + c_{20}$ とおいて，問題(23)の制約条件の下での ξ の最小値と最大値をそれぞれ $\xi_{\max}, \xi_{\min}$ とすると，問題(23)は

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \xi(c_1^T x + c_{10}) \\ \text{条件} & Ax = b,\ x \geq 0, \\ & d_1^T x + d_{10} = \xi, \\ & \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{\max}, \end{array}\right. \tag{24}$$

と等価だから，パラメトリック単体法で解くことが出来る．そして様々な問題にこの解法を適用すると，$\xi_{\min}$ を計算する時間（すなわち線形計画問題を１回解く時間）の高々2倍程度の時間で解けてしまうのである．さらに，単体法のパフォーマンスの良さを検証するために考えられた確率的分析法を用いると，データ $(A, b, c_1, c_2, c_{10}, c_{20})$ がある種の分布に従う場合には，これらの問題を上のアルゴリズムで解くための平均的反復回数は，$\min\{m, n\}$ 程度であることが示される．

NP－完全な問題の中に，理論的困難さにも拘らず，実際には速く解ける問題が存在することは古くから知られている．その代表例は０－１ナップサック問題である．このことから分かるように，一口に *NP*－完全問題と言っても，その中には割合に解き易いものから，非常に難しいものまで様々なものが含まれているのである．筆者が知る限りでは，問題(23)は，*NP* 困難な問題の中で数学的構造が最も単純で，しかも最も解き易いものである（平均多項式アルゴリズムが存在することがそれを物語っている）．

ではこの問題に対する多項式アルゴリズムは存在するだろうか．恐らくそのようなものは存在しないであろうが，筆者はこの問題の分析が，古くからの難問「$P = NP$?」を解決する突破口になるものと考えている．

参考文献

[1] Konno, H., Thach, P. T. and Tuy, H., *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures,* Kluwer Academic Publishers, 1997.

[2] 今野　浩，「理財工学 I：平均・分散モデルとその拡張」，日科技連出版社，1995.

[3] 今野　浩，「理財工学 II：数理計画法による資産運用最適化」，日科技連出版社，1998.

[4] Konno, H. and Wijayanayake, A., “Mean-Absolute Deviations Portfolio Optimization Model under Transaction Costs”, Technical Report, Dept. of IE & Management, Tokyo Institute of Technology, 1998.

[5] Matsui, T., “NP-Hardness of Linear Multiplicative Programming Problem and Related Problems”, *J. of Global Optimization,* 9 (1996) 113-119.