

デリーPOS データにおける曜日変動および値下げ効果の抽出

近藤 文代

1. はじめに

消費者が購入商品を決断する場合、様々な要因によって影響を受ける。これらの要因は小売店の観点から大きく2つに分けることができる。一つは小売店が操作可能な要因であり、もう一つは小売店にとって操作不可能な要因である。前者には販売促進変数や店頭在庫量が含まれ、後者には消費者の購買行動に強く影響する環境変数が含まれる。後者のうち、とりわけ経済データやマーケティングデータには、しばしば曜日変動が存在する。本稿では、状態空間モデルを用いて、トレンドや曜日変動を分析する時系列モデルと値下げ効果を分析する回帰モデルを統合することにより、POS データに存在する曜日変動および値下げ効果を分離し、抽出する方法を紹介する。さらに、実際のデータを使った実証分析によってそのモデルの有用性を示す。

マーケティングリサーチの分野において時系列分析と回帰分析を同時に取り扱ったモデルには本モデル以外にも Smith, McIntyre, Achabal (1994) の2段階のディスプレイ最小2乗法がある。また、販売促進変数と環境変数といった分析の視点は上田 (1985a) に見られる。販売促進変数としてよく分析で取り上げられるものに、値引き、新聞の折り込みチラシ広告、商品を目立たせる目的で通常的位置とは違ったところに陳列するディスプレイが挙げられる。一方、環境変数として主要なものに曜日、天候、温度がある。上田 (1985a) は各変数の効果および影響を個々の商品のレベルでは

なく、全商品の平均的なレベルで捉えている。具体的には、一店舗のPOSデータ (1984/2/21 - 1984/5/20) を使用することにより、食品部門において生鮮食品および惣菜を除いた90商品カテゴリーから21商品カテゴリーを選択し、各カテゴリーから3ないしは5商品アイテムを選び、偏相関係数の測定と有意性検定を行なっている。その結果、値引き、チラシ広告、ディスプレイ、曜日、天候、温度のうち、平均レベルにおいて、(ディスプレイの影響を含む) 値引き、曜日、チラシ広告が販売量増加に関して、有意な正の影響を与えたとの結果を示した。さらに、各カテゴリーを商品の種類、競合アイテム数、同商品カテゴリー内の単価・重量により判別し、4つのクラスターに分類した。

4つのクラスター別では値引きは一律に高い反応を示し、それぞれ、高曜日・天候型商品、低曜日型商品、高曜日型商品、高曜日・広告型商品と呼び、各クラスターの特徴を十分考慮したマーケティングを行うことが望ましいとしている (高曜日型とは曜日変動が大きいことを意味し、低曜日型とはその逆を指す)。ただし、同研究では分類されたグループごとに、曜日や天候についての具体的なマーケティング方針を示唆しておらず、今後の課題としている。

上記の値引き効果、曜日変動、チラシ広告効果が販売量に大きな影響を与えたという結果および各変数について各グループ別の詳細な分析の重要性も踏まえ、本稿では、店舗毎にあるカテゴリーに関して状態空間モデルに基づく曜日変動および値下げ効果を抽出する新しいモデルを紹介する (本稿でいう「曜日変動」とは一週間のサイクルで同様なパターンを繰り返す周期的な効果を指す)。さらに、実際の店舗のPOSデータの分析を通して、そのモデルの有用性を示す。実証分析では、入手データの制約上、販売促進変数として値引きを、環境変数として曜日を取り上げることとし、価格変動による販売量変化が顕著で、日次に配荷され、日次の販売量予測が重要な牛乳のデータ

こんどう ふみよ 総合研究大学院大学 統計科学専攻
〒106-8569 東京都港区南麻布4-6-7 kondou@ism.ac.jp
受付 98.7.8 採択 99.1.11

POS データを提供して下さった流通システム開発センターの小野常務と西山上級研究員、貴重なコメントを下さった査読者両氏には心よりお礼申し上げます。

を実証分析の対象とした。他にも販売量に影響を与える重要な変数が存在する可能性もあるが、次節に説明するモデル式の中で、各ブランド間の残差に共分散構造を持たせ、回帰係数をより正確に推定できるようにした (Pindyck and Rubinfeld (1981), 第 11 章参照)。

2. 曜日変動を抽出するための曜日調整モデル

店頭に並べられている個々の商品をそれぞれ一つのブランドとする。ただし、直接分析の対象としない商品は一括して一つのその他ブランドとする。 n 期における k 個のブランドの販売量を k 変量の時系列 $y(n) = (y_1(n), \dots, y_k(n))^T$ で表し、以下のように分解できるものとする (モデル TD)。

$$y(n) = t(n) + d(n) + w(n) \quad (1)$$

ただし、 $t(n)$ は販売量の長期トレンド成分、 $d(n)$ は周期的な曜日変動成分、 $w(n)$ は観測ノイズを表す k 次元のベクトルとする。

観測ノイズは平均がゼロで分散共分散行列が Σ_w の正規分布に従うものとする。(1) 式は経済データの季節調整に用いられるモデルの多変量版であり、観測された変動を傾向的な変化と曜日の影響とその他の偶然の変動に分解するものである。

2.1 長期トレンド成分 $t(n)$

あるブランドの長期トレンド成分とは時系列において比較的長期の動きをする成分をさす。対象とするカテゴリーは成熟製品カテゴリーで、トレンド成分は習慣的なリピート購入に対応し、隣り合う時点の成分同士がほぼ同じとしてモデル化されるものとする。

本稿では 1 次から 3 次の長期トレンド成分の次数の中で、1 次が最良という分析結果に基づいて (Kondo and Kitagawa (1998b))、長期トレンド成分 $t(n) = \{t_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ を以下の 1 次の確率差分方程式で表現する。

$$t_i(n) - t_i(n-1) = v_{t_i}(n), \quad v_{t_i}(n) \sim N(0, \sigma_{t_i}^2) \quad (2)$$

ただし、システムノイズ $v_{t_i}(n)$ は正規白色過程である (Kitagawa and Gersch (1984))。

2.2 周期的な曜日変動成分 $d(n)$

周期的な曜日変動は一週間のサイクルで同様なパターンを繰り返す成分である。曜日変動成分 $d(n) =$

$\{d_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ は以下のように一周期の和がほぼゼロとなる成分としてモデル化される。

$$\sum_{j=0}^6 d_i(n-j) = v_{d_i}(n), \quad v_{d_i}(n) \sim N(0, \sigma_{d_i}^2) \quad (3)$$

ただし、システムノイズ $v_{d_i}(n)$ は正規白色過程であり、曜日変動のパターンの変化に対応する (Kitagawa and Gersch (1984))。

3. 状態空間表現に基づくモデルの同定と時系列の分解

(1) - (3) 式のモデルは以下の状態空間モデルで統合することができる。

$$y(n) = H\alpha(n) + w(n) \quad \text{観測モデル} \quad (4)$$

$$\alpha(n) = F\alpha(n-1) + Gv(n) \quad \text{システムモデル} \quad (5)$$

ただし、 $\alpha(n)$ は $7k$ 次元の状態ベクトル、 $w(n)$ は観測ノイズ、 $v(n)$ はシステムノイズで、以下のように正規分布に従うものとする。

$$\begin{bmatrix} w(n) \\ v(n) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_w & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right) \quad (6)$$

一変量の場合、(4) 式および (5) 式のベクトルおよび係数行列は以下のように与えられる。

$$\alpha(n) = \begin{bmatrix} t(n) \\ d(n) \\ \vdots \\ d(n-5) \end{bmatrix}, \quad H = [1 \mid 1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & \\ 0 & & & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & 1 & \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v(n) = \begin{bmatrix} v_{t_i}(n) \\ v_{d_i}(n) \end{bmatrix} \quad (7)$$

多変量の場合については (Kondo and Kitagawa (1998b)) を参照。状態空間表現の利用により、モデルの同定、時系列の予測・分解を統一的な枠組の下で行なうことができる。

3.1 モデルの同定

モデルに含まれるパラメータを θ 、観測値を y_1, \dots, y_N とする時、尤度関数は条件付き分布を用いて以下のように表わされる。

$$L(\theta) = f(y_1, \dots, y_N | \theta) = \prod_{n=1}^N f(y_n | Y_{n-1}, \theta) \quad (8)$$

ただし、 $Y_{n-1} \equiv \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ で、右辺の各項は以下のように与えられる。

$$f(y_n | Y_{n-1}) = (2\pi)^{-k/2} (|V_{n|n-1}|)^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_{n|n-1}^T V_{n|n-1}^{-1} \varepsilon_{n|n-1} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $\varepsilon_{n|n-1} = y(n) - y_{n|n-1}$ は時系列の予測誤差、 $y_{n|n-1}$ と $V_{n|n-1}$ は観測値 $y(n)$ の予測値および分散共分散行列で以下のように求めることができる。

$$y_{n|n-1} = H_n \alpha_{n|n-1} \quad (10)$$

$$V_{n|n-1} = H_n W_{n|n-1} H_n^T + \Sigma_w \quad (11)$$

ここでは $\alpha_{n|n-1}$ および $W_{n|n-1}$ は状態ベクトル α_n の一期先予測値および分散共分散行列でカルマンフィルタによって簡単に求められる(片山 1983)。(9)を(8)に代入するとモデルの対数尤度は次のように表わされる。

$$\log L(y|\theta) = -\frac{1}{2} \left\{ Nk \log 2\pi + \sum_{n=1}^N \log |V_{n|n-1}| + \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n|n-1}^T V_{n|n-1}^{-1} \varepsilon_{n|n-1} \right\} \quad (12)$$

これを最大化することによって θ の最尤推定値を求めることができる。

いくつかの時系列モデルの候補がある場合は、それぞれのモデルの統計的あてはまりの良さを情報量規準 AIC によって評価し、比較することができる。

$$\begin{aligned} \text{AIC}(m) &= -2(\text{最大対数尤度}) + 2(\text{パラメーター数}) \\ &= -2 \sum_{n=1}^N \log f_m(y_n | \hat{\theta}_m) + 2|\hat{\theta}_m| \quad (13) \end{aligned}$$

(13)では $f_m(y_n | \hat{\theta}_m)$ は尤度の最大値を表わし、 $|\hat{\theta}_m|$ はベクトル $\hat{\theta}_m$ の次元を表わす。AICの最も小さな値をとるモデルを採用することによって、客観的なモデル選択が実現できる。

4. トレンドと曜日変動への分解

ある2つのスーパーマーケットでの2年間(1994/2/28 - 1996/3/3)の牛乳のPOSデータを分析した。

図1の2つのグラフは店舗Aおよび店舗Bで扱われている各商品の販売量の積み上げグラフである。店舗Aでは各商品の販売量がほぼ並列的に推移しているのに対し、店舗Bでは各商品間に存在するし烈な競合関係が明らかに読みとれる。店舗Aでは価格変動がほとんどなく、各ブランドの販売量(1l換算)の変動も小さい(牛乳合計の分散:3801.0)。店舗Bでは多くのブランドにおいて価格が頻繁に変動し、販売量の変動も大きい(牛乳合計の分散:19402.7)。4大ブランド合計の販売量は店舗Aではカテゴリー全体の販売量の75%を占め、店舗Bでは87%を占めるため、それぞれ4大ブランドおよびその他合計の5変量を考えた。

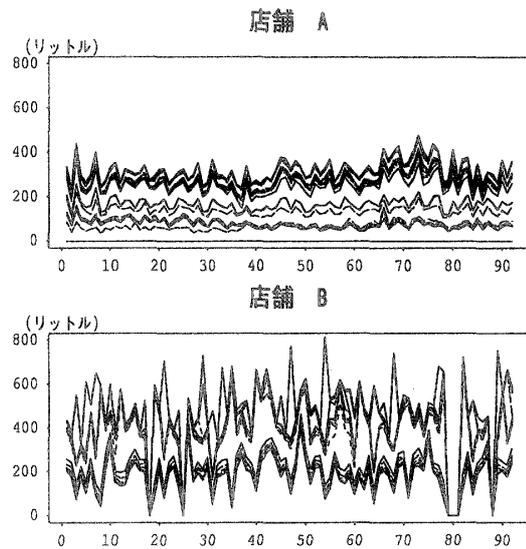


図1: 各商品の販売量の積み上げグラフ(92日間)

表1は店舗Aおよび店舗Bの4大ブランドの販売量に関する曜日ごとの平均値である。店舗Aでは火曜日にとどのブランドも販売量が一番多いことがわかる。一方、各ブランドの平均値のみでは店舗Bでの曜日変動は見当もつかない。そこで、店舗Aおよび店舗Bの各ブランドの販売量をトレンドと曜日変動に分解するモデルによる分析を行なった(定休日を含む販売量ゼロの日は欠落データとして取り扱った)。その結果、最尤法で推定されたモデルのAICはトレンドのみのモデルについて店舗Aでは29264.4、店舗Bでは39354.0、トレンドに曜日変動を加えたモデルについて店舗Aでは29142.4で、店舗Bでは39118.0、双方とも曜日変動を加えることによってAICの値がそれぞれ100以上または200以上減少し、曜日変動の存在

が確認された。表2は店舗Aの各ブランドについての原データの分散と曜日調整モデル（モデルTD）における残差分散の比較である。曜日調整モデルをあてはめた場合の残差分散は原データの分散の8割以下に減少していることが分かる。店舗Bについても表6において残差の減少傾向が見られる。

表1: 4大ブランドの販売量に関する曜日毎の平均値
店舗Aおよび店舗B

曜日	店舗A			
	A 1	A 2	A 3	A 4
月	42.2	28.0	63.9	22.3
火	58.4	41.3	87.4	29.4
水	42.3	31.3	65.9	23.7
木	43.1	31.7	67.9	24.5
金	50.5	37.7	71.8	26.9
土	48.3	37.2	72.8	29.2
日	43.0	24.0	69.6	22.6
平均	46.8	33.0	71.3	25.5

曜日	店舗B			
	B 1	B 2	B 3	B 4
月	159.8	63.9	45.3	7.7
火	191.4	69.4	46.4	19.8
水	116.2	38.0	37.2	2.3
木	97.4	133.0	47.6	133.4
金	146.4	46.8	104.0	14.3
土	157.5	99.8	66.6	37.3
日	162.8	97.1	57.6	20.6
平均	147.4	78.3	57.8	33.6

表2: 各ブランドの原データの分散および残差分散

ブランド	A1	A2	A3	A4
(a) 原データ	238.94	175.82	373.28	80.63
(b) モデルTD	134.73	111.07	223.63	60.84
比率 (b) / (a)	0.564	0.632	0.599	0.755

曜日変動の推定値は毎日少しずつ変動するが、図2はA2の販売量に含まれる最終週(1996/2/25-1996/3/3)の一週間のサイクルを取り出したものである。一つの店舗でのある特定ブランドに関する一週間のサイクルとは、その店舗にそのブランドの牛乳を買いに来る消費者の総体的な傾向を表し、個々の消費者が何曜日にそのブランドを購入するといった習慣的な購買パターンが全て積み重なったものを表している。A2では火曜日は平均より約8本多く、逆に日曜日には約8本少ない変動パターンが見られる。

図3はA2について150日分の観測データ、曜日変動成分、残差を示したものである。曜日変動成分の分散

(33.2)は観測データの分散(175.8)の18.9%を占める。一方、図4はB1について同期間の観測データ、曜日変動成分、残差を示したものである。B1の観測データには非常に大きな販売量の変動が見られる。曜日変動成分の分散(416.7)は観測データの分散(7583.7)の5.5%を占める。図4の各グラフを比較するとトレンドと曜日変動のみのモデルでは残差が非常に大きく、曜日変動の他に販売量の変化に大きく影響を与える要因が存在することを示唆している。次の節では店舗Bのデータについて値下げ効果も含めたモデルで分析する。

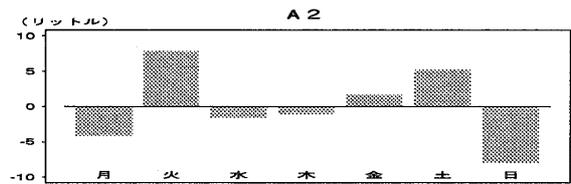


図2: A2の一週間サイクル

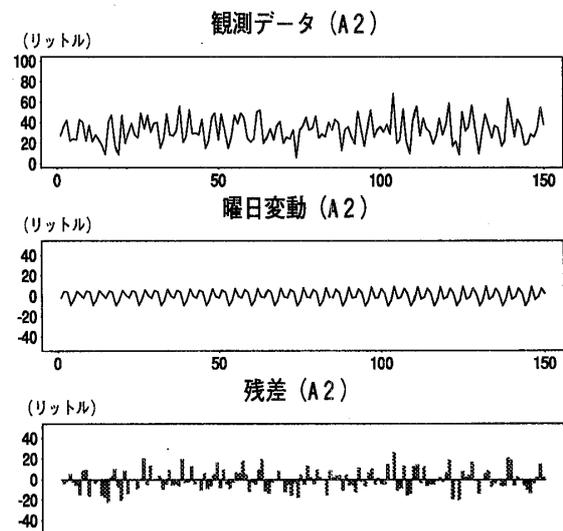


図3: A2の観測データ、曜日変動成分、残差

5. 値下げ効果を考慮したモデル化

店舗Bの販売量データについて曜日調整モデルでは説明し切れないかなり大きな変動が存在することが分かった。そこで、曜日調整モデルを拡張し、値下げの影響で変化する成分 $x(n)$ を加えた以下の値下げ効果モデルを考える (モデルTDX)。

$$y(n) = t(n) + d(n) + x(n) + w(n) \quad (14)$$

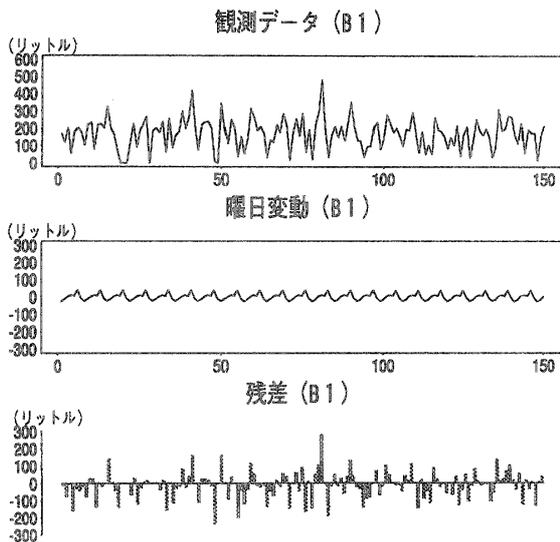


図 4: B1 の観測データ、曜日変動成分、残差

以下では $x(n)$ のことを値下げ効果成分と呼ぶことにする。このモデルの状態空間表現については (Kondo and Kitagawa (1998b)) を参照。

5.1 値下げ効果成分 $x(n)$

値下げ効果成分は、価格の値下げ効果を追求する本分析では価格がブランドの販売量に影響を及ぼす成分とする。値下げ効果成分 $x(n) = \{x_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ は次節で定義される価格関数 $u(n)$ を用いて以下のように表現できるものとする。

$$x(n) = B(n)u(n), \quad B(n) = \{b_{ij}(n)\} \quad (15)$$

ただし、 $b_{ij}(n)$, $i, j = 1, \dots, k$ は競合構造を表す係数で制約条件 $b_{ii}(n) \leq 0$, $b_{ij}(n) \geq 0$ ($i \neq j$) を満たす。さらに、係数 $b_{ij}(n)$ は市場の変化に反応し、時間的に緩やかに変化する時変係数であるとする。このような時変係数に対してランダムウォーク型のモデル

$$b_{ij}(n) - b_{ij}(n-1) = v_{b_{ij}}(n), \quad (16)$$

$$v_{b_{ij}}(n) \sim N(0, \sigma_{b_{ij}}^2) \quad (17)$$

を導入し、システムノイズ $v_{b_{ij}}(n)$ は正規白色過程であるとする。ただし、その分散はトレンド成分の変動の大きさに比例し、 σ_b^2 をブランド間で共通な分散に関するパラメーター、 $\sigma_{t_i}^2$ はブランド i のトレンド成分のシステムノイズ分散とすると、

$$\sigma_{b_{ij}}^2 = \sigma_b^2 \left(\sigma_{t_i}^2 / \sum_{j=1}^k \sigma_{t_j}^2 \right), \quad \sigma_b^2 \leq R \sum_{j=1}^k \sigma_{t_j}^2 \quad (18)$$

が成り立つものとする。R は価格関数のレンジの半分であり、値下げ成分のシステムノイズ分散がトレンド成分のシステムノイズ分散との関係で大きくなり過ぎないように上限を与えている (Kondo and Kitagawa (1998b))。

5.2 価格関数による販売量増加のモデル化

Blattberg and Neslin (1990, p.235) は値下げなどの販売促進政策をその時系列における通常の販売の経過を妨げる短期的な干渉とみなした。価格は消費者の購入商品決定の際に利用される一連の入力情報と見なすことができ、結果的に生じる販売量の増減効果は消費者の心理プロセスを通じた断続的な効果である。ここでのモデル化は消費者の価格に対する反応のうち、ある一つのブランドの値引きがそのブランドの短期的な販売量増加をもたらす場合のみを考える。つまり、値引きによって販売量が断続的に増加するかどうかを考慮する必要があり、入力-出力の関係を記述するモデルがこの点において重要な役割を果たす。値引きによるパルス状の販売量増加をモデル化したものを「価格関数」と呼ぶことにし、 $u(n) = \{u_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ を以下の k 変量の価格関数とする。

$$u_i(n) = f(p_i(n)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (19)$$

ただし、 $p(n) = \{p_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ は k 変量ベクトルで、ある製品カテゴリーにおける実際のブランドの価格とする。考慮された価格関数は原点を通り、原点での基本となる販売量レベルはトレンド + 曜日変動の販売量レベルと一致する。価格関数の絶対値が大きくなるほど販売量は増加する。

値引きは常にパルス状の販売量増加を生み出すとは限らない。その理由としては、効果を生み出すには入力された刺激が弱すぎたり、ブランド間での競争力に差があったり、経験的に知られているプロモーション効果の減衰 (deal decay) などが考えられる。従って、以下の5つの関数ではインプットを断続的な販売量増加の発生と同期させるために、競合による値引き効果発生妨害メカニズムや時間経過とともに値引き効果が減衰するプロセスを考慮した。

消費者が k 個のブランドについて現時点の価格と通常価格とを比較し、また、店頭に並べられている競合の価格を比較することによって購入するブランドを決定するという実際の状況を踏まえ、価格差によって決定される4つの即時的な価格関数を考案した。4つ

の価格関数については実際の価格と全期間の最高価格 (通常価格の代用) からの差 $\tilde{u}(n) = \{\tilde{u}_i(n)\}$, $i = 1, \dots, k$ を使用したものである。 $\tilde{u}(n)$ は以下のように定義される。

$$\tilde{u}_i(n) = p_i(n) - \max_{n \in \{1, \dots, N\}} p_i(n) \leq 0 \quad (20)$$

5つ目の関数は経験的に存在が知られている値引き効果の減衰を表す関数である。この他にも価格レベルを直接比較し、競合ブランド間で最も安い価格の際にのみに販売量が増加する場合や入力指数関数で表される飽和点をもつ場合も考慮したが、モデル選択の結果、それらは選ばれなかった。5つの価格関数は以下の通りである。

価格関数 $f_1 \sim f_3$ は次の共通式を使って表すことができる。

$$\begin{aligned} u_i(n) &= \tilde{u}_i(n) - c(n) \quad \text{条件 A を満たす場合} \\ &= 0 \quad \text{条件 A を満たさない場合} \end{aligned} \quad (21)$$

f_1) 値引きレベル: 全期間における最高価格と実際の価格との価格差

$$c(n) = 0 \quad \text{かつ} \quad \text{条件 A を常に満たす} \quad (22)$$

f_2) 競合ブランドとの相対値引きレベル: あるブランドの販売増は競合ブランドの値引きレベル以上の場合のみ

$$c(n) = 0 \quad (23)$$

$$\text{条件 A は } \tilde{u}_i(n) \leq \min_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} \tilde{u}_j(n)$$

f_3) 競合ブランド間における最大値引きレベル: 販売増は f_2 と同じ条件だが、その入力レベルは競合ブランドとの値引きレベル差により決定

$$c(n) = \min_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} \tilde{u}_j(n) \quad (24)$$

$$\text{条件 A は } \tilde{u}_i(n) \leq c(n)$$

f_4) 上限および下限のしきい値: 販売増は価格差がある範囲にある場合のみ

$$\begin{aligned} u_i(n) &= \tilde{u}_i(n) \quad Lth \leq -\tilde{u}_i(n) \leq Uth \quad \text{の場合} \\ &= 0 \quad \text{その他} \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、 $0 < Lth < Uth$ により 上限および下限のしきい値を決定。

f_5) 値引き効果減衰関数: 値引きが2期以上続けて行なわれた場合、値引き効果が減衰する。店頭での在庫切れなどの物理的な状況も考慮し、初期の効果レベルに復帰するリセット機能を有する。 $f_b[\]$ は f_1 から f_4 における最良の価格関数を表す。

$$u_i(n) = \exp\{-\gamma(n - n_0)\} f_b[u_i(n)] \quad (26)$$

ただし、 $\gamma \geq 0$ は定数パラメーター、 n_0 は値下げ開始時点、 η はある正の数で、 $n - n_0 > \eta$ である場合、 n にリセットされる。

価格関数は値下げ効果成分 $x(n)$ に関する (15) 式において係数 $b_{ij}(n)$ が時間的に変化しない一変量モデルで決定する。価格関数に使用したのは B1 ~ B4 の4ブランドである。4ブランドの通常価格および特徴は表3に示す通りである。

表3: 各ブランドの通常価格および特徴

ブランド	通常価格	タイプ	特徴
B1	198	レギュラー	PB ¹
B2	228	レギュラー	NB ²
B3	178	B2の低脂肪タイプ	NB
B4	215	レギュラー	ST ³

注1) PB: プライベートブランド; 注2) NB: ナショナルブランド;

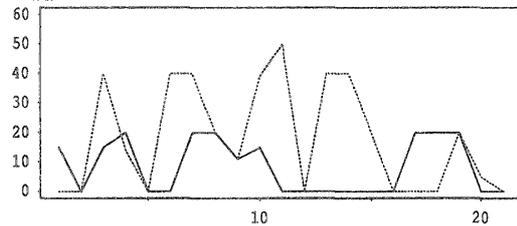
注3) ST: 特に週の後半に短発的に店頭在庫有り

B1の価格関数に関する分析の結果は表4に、B2、B3、B4については表5に示す通りである。符号のT、W、 f_1 はそれぞれトレンド成分、曜日変動成分、価格関数 f_1 を表す。 f_1 、 f_2 、 f_3 の中では、B2、B3においては f_1 が選ばれ、B1では f_3 がAICを最小とする良い価格関数であることが分かった。つまり、低価格商品であるプライベートブランド(B1)の値引きは他のブランドが値引きしていない場合にのみ、しかも、他のブランドの値引きを上回る値引き額差に関して有効であることが分かった。

図5、図6に実際の店舗Bのデータを分析して得られた価格関数を図示した。図5の上のグラフは価格関数B1の値下げ額(実線)と競合における最大の値下げ額である。下のグラフにその価格関数 f_1 、 f_2 、 f_3 が図示してある。 f_1 はB1の値下げ額の符号を単に逆にしたものになっている。下のグラフの点線は f_2

を表し、競合の値下げ額より値下げ幅が大きい場合にのみ影響を及ぼす。破線は f_3 を表し、競合の値下げ額と B1 の値下げ額の差だけが価格関数として影響を及ぼす。

B1の値下げ額(実線) 対 競合の値下げ額最大値(点線)
(円)



価格関数, F1(実線), F2(点線), F3(破線)

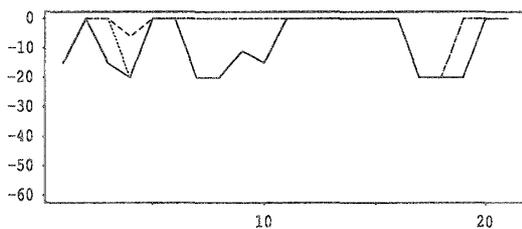


図 5: f_1, f_2, f_3 の価格関数

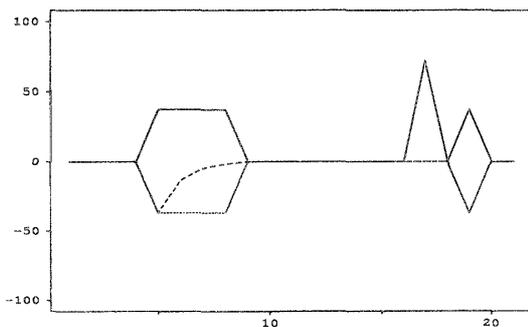


図 6: f_4, f_5 の価格関数

B4の値下げ額(実線)
価格関数, F4(点線), F5(破線)

図 7 は 4 ブランドの値下げレベル (y 軸) と販売量 (x 軸) のグラフであるが、B4 に関するグラフを見ると、値下げに関して 2 つのグループが異なる動きをしていることが分かる。大まかには価格を下げると販売量が増加する関係が見られるが、非常に大きな値下げの際にゼロに近い販売量しかないグループがある。牛乳は長持ちしない製品カテゴリーで、配荷されて 2、3 日たった商品は 20-30% の値下げが実施されることが多い。従って、B4 で見られる 60 円を越える大き

な値下げは売れ残り商品の見切り処分である可能性が高い。価格関数として、販売量が増加する条件のみを求めているため、第 4 の価格関数として上限および下限のしきい値を持つ価格関数 f_4 をつけ加えた。値下げが明らかに販売量に貢献しないグループが存在するのは B4 のみであり、B4 のみ価格関数 f_4 を考慮した。さらに B4 では常時店頭在庫があるとは限らない為、価格関数 f_2, f_3 は考慮しないで f_1 と f_4 を比較した結果、 f_4 が良いモデルとして選ばれた。図 6 の実線はブランド B4 の値下げ額である。点線は f_4 を表し、値下げ額が 18 円から 57 円の間にある場合のみ入力がある。

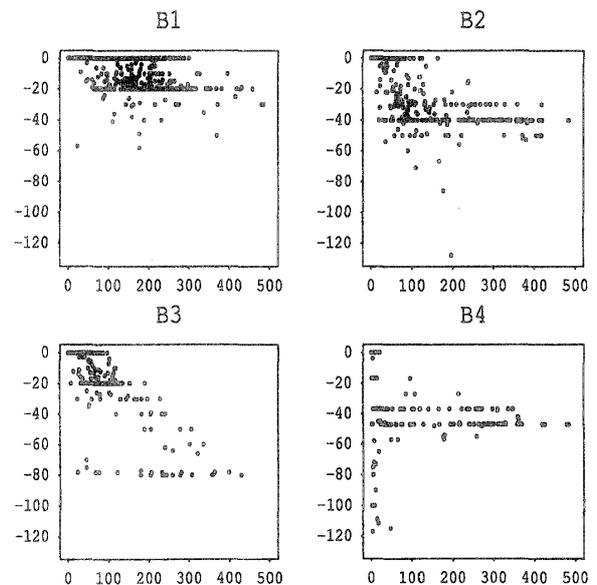


図 7: 各ブランドの値下げ (y 軸) に対する販売量 (x 軸)

B1 の値を除く B2、B3、B4 では f_1 から f_4 の条件に加えて値引き効果の減衰を加えた f_5 の関数を持つモデルの AIC が最小となり、一番良いことが分かった。図 6 の破線は B4 の f_5 を表し、B4 の値下げが連続するとその値下げ効果は減衰する。

最後に、上記のように価格関数を決定しても、B2 については図 7 から明らかなように突出している点が存在する。この点に一つのパラメーターを与え、最良の値を決定した。その結果、128 円の値引き効果は 54 円の値引き効果しかないことが分かった。従って、このように通常より飛び抜けて大きな値引きをしても 74 円分は効果が期待できないことになる。

表 4: B1 のモデルに関する対数尤数および AIC

モデル (T,W, f_k)	対数尤数	AIC	パラメーター数
モデル (T, ,)	-4032	8071	3
モデル (T,W,)	-4013	8046	10
モデル (T,W, f_1)	-3954	7930	11
モデル (T,W, f_2)	-3920	7863	11
モデル (T,W, f_3)	-3909	7839 †	11
モデル (T,W, f_5)	-3909	7841	12

表 5: B2, B3, B4 のモデルに関する AIC

モデル (T,W, f_k)	ブランド		
	B2	B3	B4
モデル (T, ,)	8249	7400	3449
モデル (T,W,)	8256	7388	-
モデル (T,W, f_1)	7793 †	6659 †	3394
モデル (T,W, f_2)	7902	6802	-
モデル (T,W, f_3)	7878	6880	-
モデル (T, , f_4)	-	-	3220 †
モデル (T,W, f_5)	7755 ‡	6602 ‡	3054 ‡

5.3 トрендと曜日変動および値下げ効果モデルの分析例

価格変動の大きい店舗 B のデータに対してはトレンドおよび曜日変動に加え、値下げ効果も考慮し、(15) 式において係数 $b_{ij}(n)$ を全て含めたフルモデルを当てはめた。値下げ効果を考慮しない場合 (AIC=39118.0) と比べると AIC の値 (36810.4) は 2300 以上減少し、モデルのあてはまりは著しく改善した。さらに、価格関数の変数選択を行なった結果得られた最良のモデルの AIC の値は 36603.1 となり、さらに 200 以上減少した。表 6 は値下げ効果を加えない曜日調整モデル (モデル TD) と加えた最良のモデル (モデル TDX) との各ブランドに関する残差分散の比較である。5 行目は後者のモデルの残差分散を前者のモデルの残差分散で除した比率である。4 ブランドについて値下げ効果を加えたモデルでは加えないモデルより残差分散が大幅に減少していることが分かる。

図 8 は最良のモデルについてその他ブランドを除く 4 つの販売量とそれらの価格関数の関係を表したものである。+印は販売量に対して正の影響を与えるもの、-印は負の影響を与えるものである。AIC によるモデル比較の結果、その他のブランドには価格関数は影響を与えないと判断された。B1 ~ B4 の 4 ブランドの販売量は全てそれ自身の価格関数から正の影響

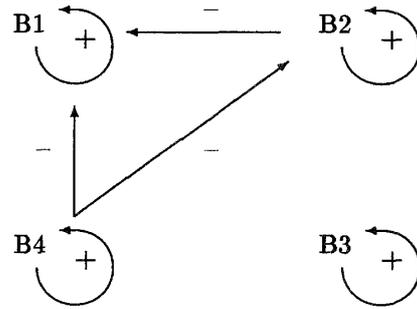


図 8: 販売量と価格関数の関係

を受けている。B1 は B2 および B4 から負の影響を受けているが、逆にそれら 2 つのブランドには影響を与えず、非対称な競合関係にあることを示している。同様に、B2 も B4 から負の影響を受けており、非対称な強弱関係にある。低脂肪タイプの B3 の価格関数はそれ自身の販売量にのみ影響を及ぼし、タイプが異なる他ブランドと互いに影響を及ぼさない独立したブランドになっている。

また、図 9、図 10、図 11 に B1、B2、B3 についてそれぞれ最良のモデル TDX の曜日変動および値下げ効果の成分を示した (B4 は週の後半に特に単発的に置かれる商品で、曜日効果は抽出していない)。全てのブランドについて曜日変動よりかなり大きな値下げ効果が抽出されている。B1 は図 8 に示されているように、B2 および B4 の価格関数により負の影響を受けているため、大きな負の値下げ効果がある。B2 も B4 の価格関数による負の値下げ効果を持つ。

図 12 は曜日調整モデル (モデル TD) について、図 13 はそれに値下げ効果を加えた最良のモデル (モデル TDX) について B1、B2、B3 のある一週間のサイクルを図示したものである。両者を比較するとこれら 3 ブランドの全てについて前者の曜日変動は後者のものよりかなり大きく、前者では値下げ変動が曜日効

表 6: 4 大ブランドの原データの分散および残差分散

ブランド	B1	B2	B3	B4
(a) 原データ	7583.7	7929.9	3138.3	8058.6
(b) モデル TD	5578.1	7313.0	2743.1	8456.9
(c) モデル TDX	3253.2	3037.1	823.8	1612.2
比率 (b) / (a)	0.736	0.922	0.874	1.049
比率 (c) / (b)	0.583	0.415	0.300	0.191

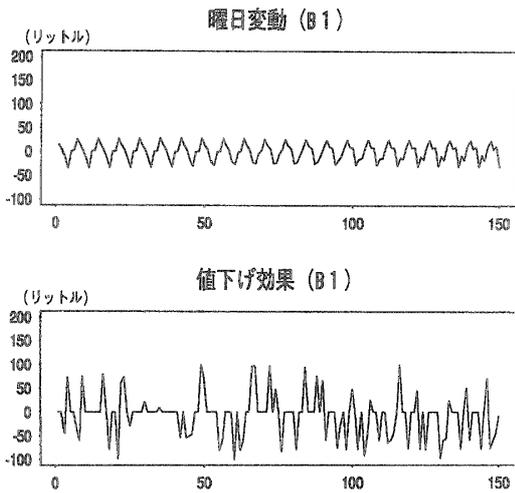


図 9: B 1 の曜日変動成分および値下げ効果成分

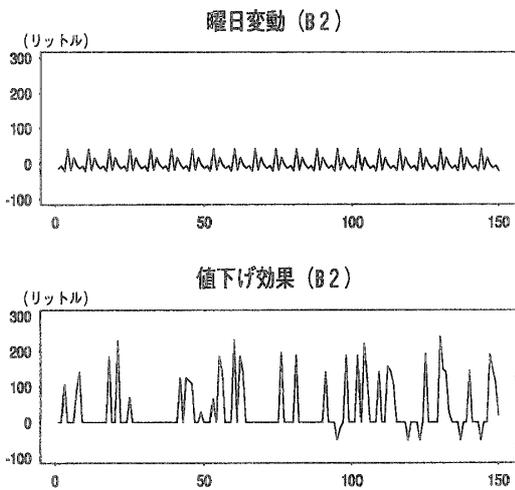


図 10: B 2 の曜日変動成分および値下げ効果成分

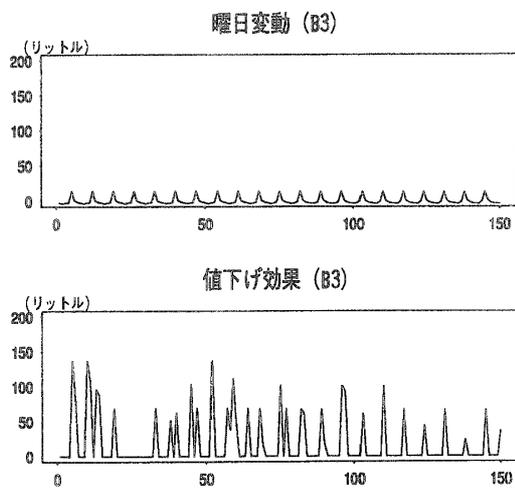


図 11: B 3 の曜日変動成分および値下げ効果成分

果に含まれてしまっていることが分かる。これはある一つのブランドについて値下げが一週間のうち、特定の曜日に行なわれていることを意味し、値下げ効果が曜日変動としてみなされていることを意味する。従って、2段階のモデル推定方法では曜日変動は過大評価されてしまうことになる。一方、同時推定の場合には多重共線性の危険性があるが、カルマンフィルターはベイズ流アプローチであり、 $Y = \beta X + \epsilon$ の線形式において $X^T X$ の行列式がゼロに近くなった場合でも、特別の問題は発生しない (Zellner 1971, p.75-81 参照)。

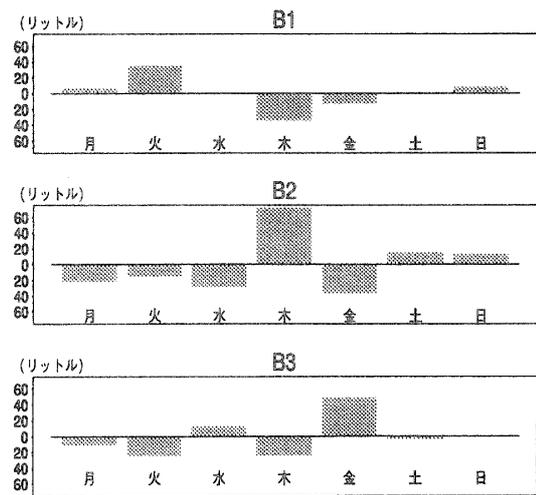


図 12: 曜日調整モデルにおける曜日サイクル

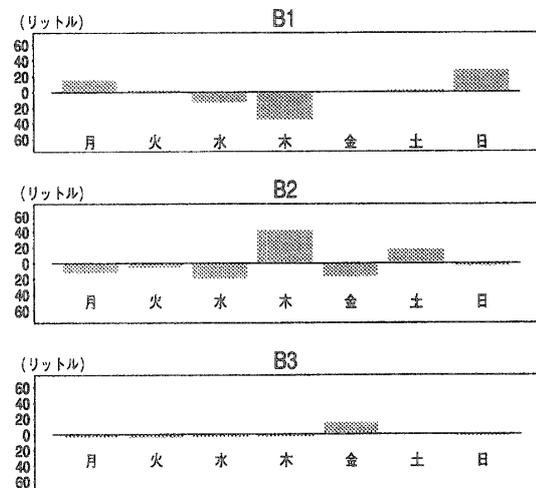


図 13: 値下げ効果モデルに関する曜日サイクル

表 7に a) 通常価格の場合、b) 各ブランドについて別々に 30 円値引きを行なった場合、c) 同時に値引きを行なった場合に関して、4 ブランドの販売量における一日先 (1996/3/4 (月曜)) の予測値を示した。4 ブランド合計の販売量は予想通り a) の場合が一番少なく、c) の場合が一番多くなっている。b) の場合においてはプライベートブランドである B1 のみを 30 円値引きした場合が一番多くなっているが、これは他のブランドを同時に値引きしない場合 (非常に稀なケース) は値引きがそのまま価格関数として有効に作用すること、また、競合ブランドの販売量に負の影響を及ぼさないという理由によることが大きい。

表 7: 一日先 (1996/3/4 (月曜)) の予測値
4 大ブランドの販売量 (リットル)

ブランド	a)	b)				c)
	通常価格の場合	別々に 30 円引きの場合				
		B 1	B 2	B 3	B 4	B1 ~ B4
B 1	124.5	248.9	84.5	124.5	75.0	35.0
B 2	35.1	35.1	135.1	35.1	2.5	102.4
B 3	29.3	29.3	29.3	122.9	29.3	122.9
B 4	5.5	5.5	5.5	5.5	187.0	187.0
合計	194.4	318.8	254.4	288.0	293.8	447.4

6. まとめ

状態空間モデルに基づいた季節調整モデルを拡張し、POS データに存在する曜日変動および値下げ効果を推定する新しいモデルを紹介した。本モデルは多頻度の時系列 POS データを用いる分析を前提とし、データ数より多いパラメーター推定を可能とする (Akaike 1980a 参照) ベイズ流アプローチをとっている。牛乳合計の一変量での周期的な曜日変動の抽出などの時系列分析や値引き効果の抽出などの回帰分析が可能である一方、競合構造の分析も含めたブランド間の多変量分析が可能である。従って、具体的な一つの商品カテゴリーや複数の商品アイテムに関して、曜日変動の抽出や値引き効果の抽出が可能となった。また、モデル化は店舗毎に可能なため、店舗間でのパラメーターの比較も可能である。

参考文献

[1] 上田隆穂 (1985a), 「セールスプロモーション変数と環境変数の効果」, 一橋論叢第 9 4 巻第 3 号,

337-352.

- [2] 片山徹 (1983), 応用カルマンフィルター, 朝倉書店.
- [3] Akaike, H. (1980a), "Likelihood and the Bayes Procedure", in *Bayesian Statistics*, Bernardo, J.M., De Groot, M.H., Lindley, D.V. and Smith, A.F.M. eds., (University Press, Valencia), 143-166.
- [4] Blattberg, R.C. and Neslin, S.A. (1990), *Sales Promotion: Concepts, Methods, and Strategies*, (Prentice Hall, New Jersey).
- [5] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984), "A Smoothness Priors - State Space Modeling of Time Series with Trend and Seasonality", *Journal of the American Statistical Association*, 79, No. 386, 378-389.
- [6] Kitagawa, G. and Gersch, W. (1985b), "A smoothness Priors Time-varying AR Coefficient Modeling of Nonstationary Covariance Time Series", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-30, No.1, 48-56.
- [7] Kondo, F. N. and Kitagawa, G. (1998a), State Space Decomposition of Daily Scanner Sales into Trend, Day-of-the-Week Effect and Price Promotion Effect, *Research Memorandum*, No.661, The Institute of Statistical Mathematics.
- [8] Kondo, F. N. and Kitagawa, G. (1998b), Four Time-varying Aspects on Scanner Sales Based on Vector State Space Model, *Research Memorandum*, No.677, The Institute of Statistical Mathematics.
- [9] Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L. (1981), *Econometric Models and Economic Forecasts*, 2nd ed., (McGraw-Hill, New York).
- [10] Smith, S.A., McIntyre, S.H. and Achabal, D.D. (1994), "A Two-Stage Sales Forecasting Procedure Using Discounted Least Squares", *Journal of Marketing Research*, 31, 44-56.
- [11] Zellner, A. (1971), "An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics", Wiley, New York.