On the maximum weight stable set problem and its extension for claw-free graphs

中村　大真
（電気通信大学大学院電気通信学研究科情報工学専攻　現所属：同大学院電気通信学研究科情報工学専攻博士後期課程）
指導教官　田村明久 助教授

1．はじめに

無向グラフ上の最大重み安定集合問題は，組合せ最適化の最も基本的な問題の1つである．この問題はNP困難であるが，クローフリーグラフに限定すれば，最大重みマッチング問題を応用して多項式時間で解ける[2]．本研究ではこの問題を双向グラフ上の一般化安定集合問題に拡張したとき，クローフリーに限定すればやはり多項式時間で解けることを示した．

頂点重み$w: V \to \mathbb{R}$の付いた無向グラフ$G=(V,E)$に対し，頂点の部分集合$S \subseteq V$で，どの2項点も隣接しないものを**安定集合**と呼び，その重みを$w(S)=\sum_{i \in S} w_i$とする．**最大重み安定集合問題**は最大重み安定集合を求める問題であり次で定式化される．$i \in S$ならば$x_i=1$，$i \notin S$ならば$x_i=0$と置き

$$\begin{array}{rll} \text{最大化} & \sum_{i \in V} w_i x_i & \\ \text{条件} & x_i + x_j \le 1 & (i,j) \in E \\ & \vec{x} \in \{0,1\}^V & \end{array}$$

双向グラフ$G=(V, E^{++}, E^{+-}, E^{--})$は3種類の辺からなるグラフである。各辺は制約$x_i+x_j \le 1$，$x_i - x_j \le 0$，$-x_i - x_j \le -1$に対応する[1]．すべての制約を満足する$\vec{x} \in \{0,1\}^V$を**解**と呼ぶ．**一般化安定集合問題**は最大重み解を求める問題であり次で定式化される．

$$\begin{array}{rll} \text{最大化} & \sum_{i \in V} w_i x_i & \\ \text{条件} & x_i + x_j \le 1 & (i,j) \in E^{++} \\ & x_i - x_j \le 0 & (i,j) \in E^{+-} \\ & -x_i - x_j \le -1 & (i,j) \in E^{--} \\ & \vec{x} \in \{0,1\}^V & \end{array}$$

双向グラフが**単純**とは，辺の種類を無視して自己ループや多重辺が存在しないことをいう．また双向グラフが**推移的**とは，$x_i+x_j \le 1$と$-x_j - x_k \le -1$から$x_i - x_k \le 0$が導かれるように，2辺の制約から導かれる制約に対応する辺が，必ず元の双向グラフに存在することをいう。一般化安定集合問題は，単純推移的双向グラフに限定して一般性を失わない。

無向グラフは，どの4頂点も$K_{1,3}$（クロー）を誘導しないとき**クローフリー**と呼ぶ．応用上重要な**ライングラフ**（グラフの辺の隣接関係を頂点の隣接関係に変換したグラフ）や**区間グラフ**（期間が重なる催しを辺で結んだグラフ．ある催しの期間が別の催しの期間に完全に含まれることはないものとする）はクローフリーである。

双向グラフの場合も，辺の種類を無視して無向グラフと同様に**クローフリー**という語を使う．本研究では一般化安定集合問題を単純推移的かつクローフリーに限定して，多項式時間解法を提案した．

2．アルゴリズムの概要

クローフリー無向グラフの最大重み安定集合を求める算法[2]の概略を次に示す．

$\boxed{\text{最大重み安定集合}} \overset{O(n)}{\Rightarrow} \boxed{\text{最大重み交互パス}} \overset{O(n^2)}{\Rightarrow} \boxed{\text{最大重みマッチング}}$

ここで$\overset{O(n)}{\Rightarrow}$は左辺の問題を1つ解くことを，右辺の部分問題$O(n)$個を解くことに帰着させることを示す．$n$は頂点数．交互パスとは安定集合に含まれる頂点と含まれない頂点が交互に並んだパスであり，マッチング算法のそれに対応する．最大重みの交互パスを求める問題を最大重みマッチング問題へ帰着するには**Edmondsグラフ**と呼ばれるグラフを構成する．しかしMintyのオリジナルの方法には誤りがある．本研究ではまずEdmondsグラフを修正することによってこの現象を回避できることを示した．

さらに本研究ではクローフリー双向グラフの最大重み解を次の手順で求められることを示した．

$\boxed{\text{最大重み解}} \overset{O(n)}{\Rightarrow} \boxed{\text{最大比交互集合}} \overset{O(n)}{\Rightarrow} \boxed{\text{最大重み交互集合}} \overset{O(n^2)}{\Rightarrow} \boxed{\text{最大重み完全マッチング}}$

無向の場合には最大重み交互パスによって安定集合の要素数が必ず＋1ずつ増えることから多項式性が導

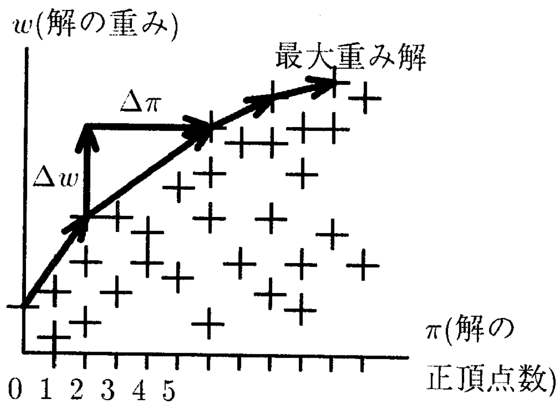

図1　比$\frac{\triangle w}{\triangle \pi}$の最大化

かれる．一方，双向グラフの解は安定集合に比べてやや複雑な構造をしているが，双向グラフに変数変換$x_i \to (1-x_i)$を施すことによって双向グラフを扱いやすい形に変換し，安定集合と同様に解に対する交互パスや交互サイクルを考えることができる．しかし変数変換は解の要素数（1の個数）を変えてしまい，最大重みの交互パス・サイクルでは多項式性は示せない．そこで変数変換で変わらない正頂点数（解に含まれる頂点のうちで，符号が負の辺が接続しないものの個数，以下πで表す）が交互パス・サイクルによる増加毎に必ず増えることを保証して多項式性を示す．それには単に重みの増加量最大の交互パス・サイクルを求めるのではなく，図1のように，正頂点数の増加量に対する重みの増加量の比を最大にする交互パス・サイクルを求める必要がある．

最大化　$\frac{\triangle w(A)}{\triangle \pi(A)}$
条件　Aは交互パスか交互サイクル
$\triangle \pi(A) \geq 1$

目的関数を線形にするために分数計画の手法を使う．実パラメータλを導入して次の最大重み問題を$O(n)$回解くことによって最大比問題を解く．

最大化　$w(A)-\lambda \cdot \pi(A)$
条件　Aは交互パスか交互サイクル

この最大重みの交互パスや交互サイクルを求める問題を，無向グラフの場合と同じように，Edmondsグラフと呼ばれるグラフを構成してマッチング問題に帰着させる．しかしEdmondsグラフに修正が必要な関係から，(1)小交互サイクル(2)大交互サイクル(3)交互パスの順に（最大重みのものを$O(n)$回求めて）最大比のものを求める3段階の手続きを踏む．大小の定義は省略するが，小交互サイクルには全列挙に近い方法が使える．大交互サイクルの方は対応するEdmondsグラフを作成し，次の事実を使う．

「辺重みのついた無向グラフと完全マッチングMに対し，最大重み完全マッチングをM^*とする．このとき$M \triangle M^*$はMに対する交互サイクルの族であり，その重みの合計はMに対する交互サイクル族の中で最大である.」

これを利用して最大重みの大交互サイクルの族を求め，これを$O(n)$回繰り返して最大比の大交互サイクルの族を求める．この族の中には最大比の大交互サイクルが存在する．

最大重みの交互パスについてもほとんど同じようにEdmondsグラフを構成して求める．Edmondsグラフはパスの両端点を指定して作るから，$O(n^2)$個必要である．

3．まとめ

本研究では2つのことを示した．まずクローフリー無向グラフの最大重み安定集合を求めるMintyの算法[2]の誤りを発見し修正した．Mintyの算法は重みなしの問題では正しいが，重み付きではEdmondsグラフを修正しないと正しく動作しないことがある．

次にこの問題を双向グラフに拡張して，クローフリー双向グラフの解の持つ性質を明らかにし，最大重み解を求める多項式時間算法を示した．単に目的関数の最大増加を繰り返しただけでは多項式性が保証されない場合に，別の指標を導入し，目的関数とその指標との増加の比を最大化して多項式性を保証する手法は，他でも有効ではないかと考える．

参考文献

[1] E. L. Johnson and M. W. Padberg, Degree-two inequalities, clique facets, and biperfect graphs, *Ann. Discrete Math.*, **16** (1982), 169-187.

[2] G. J. Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **28** (1980), 284-304.

お詫び

前号（Vol.43 No.12）「論文・研究レポート；待ち行列教育のための公式の新しい図式表現の提案（中西昌武，木村　敦）」の記事において「受付：1997年5月1日　採択：1998年9月18日」が付記されませんでした．校正ミスを心よりお詫びいたします．　（OR誌編集委員会）