# The Extended Semidefinite Linear Complementarity Problem：A Reformulation Approach

柴田　雅博

（京都大学大学院工学研究科数理工学専攻　現所属：大阪ガス㈱）

指導教官　福島雅夫 教授

## 1．はじめに

線形相補性問題(LCP)や非線形相補性問題(NCP)は，最適化問題や各種均衡問題など幅広い応用があり，オペレーションズ・リサーチの分野における重要な問題の1つである[2]．そのLCPやNCPに対して，数々の拡張された問題が提案されており，それらの拡張された問題に対して，問題の性質や解法が広く研究されている．このような拡張の流れは大きく2つある．1つは相補性問題を与える関数を一般化するものであり，その問題として拡張線形相補性問題（XLCP）がある[1]．もう1つの流れは，扱う空間を$\mathscr{R}^n$のベクトル空間から対称行列の空間に拡張する流れである．そのような問題として半正定値線形相補性問題（SDLCP）やそれを非線形化した半正定値非線形相補性問題（SDNCP）がある．この問題は組合せ問題や制御の分野で研究されている半正定値計画問題（SDP）の最適性条件にも関連する問題である．

本論文では，この2つの拡張の流れを1つにした次のように定式化される拡張半正定値線形相補性問題（XSDLCP）を考察する．

Find$(x,y)\in\mathscr{S}^m\times\mathscr{S}^m$ such that

$$Mx-Ny\in\mathscr{C},x\in\mathscr{K}^m,y\in\mathscr{K}^m,\langle x,y\rangle=0$$

ここで，$\mathscr{S}^l$は$l\times l$の実対称行列の線形空間を表し，$M:\mathscr{S}^m\to\mathscr{S}^n$と$N:\mathscr{S}^m\to\mathscr{S}^n$は線形写像，$\mathscr{K}^l\subset\mathscr{S}^l$は，$l\times l$の半正定値対称行列の凸錘集合を表す．また，$\langle\cdot,\cdot\rangle$は，$\langle x,y\rangle:=\mathrm{tr}[xy]$で定義される$\mathscr{S}^m$上のノルムである．さらに，集合$C$は線形写像$A:\mathscr{S}^m\to\mathscr{S}^k$と対称行列$b\in\mathscr{S}^k$を用いて$C=\{u\in\mathscr{S}^n|Au-b\in\mathscr{K}^k\}$と表されるものとする．本論文では，集合$\{(x,y)|Mx-Ny\in\mathscr{C},x\in\mathscr{K}^m,y\in\mathscr{K}^m\}$は空でないと仮定する．

上記で定義されたXSDLCPは，SDLCPやXLCPの自然な拡張と考えることができるので，XSDLCPを解く解法として，XLCPやSDLCPに対して考案された手法[4,6]が拡張できると期待される．本論文では，特に，XSDLCPを等価な制約なし最適化問題に変換して解く方法を考える．また，このような拡張された問題に対して，解の存在に対する議論は，これまでにあまりされていない．本論文では，SDNCPの解の存在する条件を与える．

## 2．最適化アプローチ

この節では，XSDLCPを等価な最適化問題に再定式化することができるメリット関数$f:\mathscr{S}^m\times\mathscr{S}^m\to\mathscr{R}$を提案し，その関数の性質を示す．

$$f(x,y)=\|(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-x-y\|^2 +\|[-AMx+ANy+b]_+\|^2$$

ただし，$\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$であり，$[x]_+$は$x$の$\mathscr{K}^k$への直交射影である．関数$f$に対して次の定理が成り立つ．

**定理2.1** 関数$f$は$\mathscr{S}^m\times\mathscr{S}^m$上で非負である．さらに，$f(x,y)=0$かつ$(x,y)\in\mathscr{S}^m\times\mathscr{S}^m$であることと$(x,y)$がXSDLCPの解であることは等価である．

この定理により，$f$を目的関数とした最小化問題がXSDLCPと等価になることがわかる．しかし，$f$は一般に凸関数ではないので，$f$の停留点がXSDLCPの解となる条件を調べることは重要である．

その条件を示す前にいくつかの定義を与える．まず，線形写像$A:\mathscr{S}^n\to\mathscr{S}^k$に対して，$A^*$は$A$の随伴作用素とする．さらに，$C$のrecession coneを$0^+C$で表し，$0^+C$の極錐を$(0^+C)^*$であらわす．

これらの定義を用いてを求めたい条件を与えることができる．

**定理2.2** 次の条件のうち少なくとも1つは満たされているとする．

（i）線形写像$MN^*$は$(0^+C)^*$上でcopositiveである．

（ii）$-b\in\mathscr{K}^k$が成り立つ．

そのとき，$f$の停留点はXSDLCPの解である．

## 3．SDNCP の解の存在性

この節では，半正定値非線形相補性問題(SDNCP)の解の存在する条件を与える．SDNCP は次のように定式化される．Find $x \in \mathscr{S}^m$ such that

$$x \in \mathscr{K}^m,\ F(x) \in \mathscr{K}^m,\ \langle x, F(x) \rangle = 0$$

ここで$F$は$\mathscr{S}^m$から$\mathscr{S}^m$への写像とする．解が存在する条件を与えるために，次のSDNCPのメリット関数$\Psi(x)$が少なくとも1つの停留点をもち，その停留点が解であるということを示す．

$$\Psi(x) = \max\{0, \langle x, F(x) \rangle\}^2 + \frac{1}{2}\|(x^2 + F(x)^2)^{1/2} - x - F(x)\|^2$$

この関数$\Psi$は Yamashita と Fukushima[6]が提案した関数である．彼らはこのメリット関数を用いて$F$が単調でかつ狭義実行可能であるなら SDNCP は解を持つことを証明した．これは，$\nabla F(x)$が半正定値であるなら，$\Psi$の停留点は SDNCP の解であることに基づいている．最近，$\nabla F(x)$が半正定値よりも緩い条件である$P_0$-行列であるときでも，このような性質を持つことが示された[3]．ここで，$P_0$-行列とは次のように定義される行列であり，$I = \{1, \dots, m\}$とする．

**定義3.1** 次の条件を満たすとき線形写像$M : \mathscr{S}^m \to \mathscr{S}^m$を$P_0$-行列と呼ぶ．$x \neq 0$である任意の$x \in \mathscr{S}^m$と任意の正則行列$p \in \mathscr{R}^{m \times m}$に対して，$(px)_i \neq 0$かつ

$$[(px)M(px)^T]_{ii} \geq 0$$

を満たす添字$i \in I$が存在する．ただし，$(px)_i$は行列$px$の第$i$列を表す．

NCP は扱う関数が一様$P$-関数なら解をもつことが知られている．そこで，次のように$\mathscr{S}^m$空間における一様$P$-関数を定義する．

**定義3.2** 関数$F : \mathscr{S}^m \to \mathscr{S}^m$が次の条件を満たす正の定数$\mu$が存在するとき一様$P$-関数と呼ぶ．$x \neq y$である任意の$x, y \in \mathscr{S}^m$と任意の正則行列$p$に対して，

$$[p(x-y)(F(x)-F(y))p^T]_{ii} \geq \mu \|p(x-y)\|^2$$

を満たす添字$i \in I$が存在する．

これらの定義を用いて，解の存在性を示すのに必要な命題を与える．ここで$w(t)$は$\lim\sup_{t \to \infty}\|\omega(t)\|/t^2 = 0$かつ$\lim\inf_{t \to \infty}\|\omega(t)\| = \infty$を意味し，$\lambda_{max}(x)$は$x$の最大固有値を表すとする．

**命題3.1** $F(x) = \omega(\lambda_{max}(x))$かつ一様$P$-関数であるとする．そのとき$\lim_{\|x\| \to \infty}\Psi(x) = \infty$が成り立つ．

この命題を用いて定理を得ることができる．

**定理3.3** 関数$F$は微分可能かつ$F(x) = \omega(\lambda_{max}(x))$とする．そのとき$F$が一様$P$-関数なら，SDNCP は解をもつ．

## 4．まとめ

本論文では，拡張半正定値相補性問題（XSDLCP）に対するメリット関数を提案した．そして，その関数を用いて XSDLCP を制約なしの最適化問題に再定式化し，メリット関数の停留点が解であるための十分条件を確立した．また，SDNCP に対する解の存在条件をあたえた．今後の課題は，XSDLCP の等価な最小化問題を解く効率のよいアルゴリズムの開発などである．

### 参考文献


[1] O.L. Mangasarian and J.-S. Pang, The extended linear complementarity problem, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 16 : 359-368, 1995.

[2] J.-S. Pang, Complementarity problems, *Handbook of Global Optimization*, Edited by R. Horst and P. Pardalos, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] H.D. Qi and X. Chen, "On stationary points of merit functions for semi-definite complementarity problems," Working paper, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China, 1997.

[4] M.V. Solodov, Some optimization reformulation for the extended linear complementarity problem, working paper, Instituto de Matemática Pure e Aplicada, Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico, Rio de Janeiro, RJ 22460-320, Brazil.

[5] P. Tseng, Merit functions for semi-definite complementarity problems, *Mathematical Programming*, to appear.

[6] N. Yamashita and M. Fukushima A new merit function and a descent method for semidefinite complementarity problem, to appear in *Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, M. Fukushima and L, Qi (eds.), Kluwer Academic Publishers.