Asymptotic Analysis of Tail Probabilities in Queueing Models with Markovian Arrival Processes

加藤　憲一

(東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻　現所属：同大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻博士後期課程)

指導教官　牧本直樹　講師・高橋幸雄　教授

1．はじめに

待ち行列ネットワークにおいて待ち時間や待ち行列長の定常分布を陽に求めることは一般に難しい．一方これらの確率の裾が指数的に減少することを利用した漸近的な解析を行う方法がATMネットワークにおける微小セル損失率の推定との関連で近年注目されている．Glynn and Whitt（文献[3]）はG/G/1待ち行列に対して，到着課程の極限対数ラプラス-スティルチェス変換（*asymptotic logarithmic LST,* ALLST）$\phi(s)$とサービス時間分布のラプラス-スティルチェス変換（*Laplace-Stieltjes transform,* LST）$h(s)$が存在するとき，定常状態での待ち時間Wの分布が以下のような指数的な減衰率を持つことを示した．

$$\lim_{w\to\infty}\frac{1}{w}\log P(W>w)=-\delta \tag{1}$$

ここで$\delta>0$は$\phi(s)+\log h(-s)=0$の解とする．

非循環型待ち行列ネットワークにおいては，あるノードからの退去が後方ノードへの到着を構成するので，到着過程のALLSTとサービス時間分布から退去過程のALLSTを求めることができたならば，ネットワーク内の先頭ノードから後方ノードへ順次解析することが可能となる．このような視点からいくつかの研究が行われているが，応用上はまだ制約が多い（例えば，文献[4]参照）．

本論文では，サーバの処理能力が系内人数に依存するMAP/M/1モデルに対して，退去過程のALLSTをMAPとサービス率によって表し，その結果を2段の複合直列型待ち行列モデルにおける定常分布の漸近解析へと応用した．

2．MAP/M/1待ち行列の退去過程

到着過程が有限状態空間上のマルコフ連鎖に支配されるマルコフ到着過程（MAP）であり，サービス時間が指数分布に従うMAP/M/1モデルを考える．待ち行列長がk人の時のサービス率はμ_kで，$\mu_k=\mu(k=c,c+1,\ldots)$および$\mu_k\le\mu(k=1,2,\ldots,c-1)$を仮定する．また，システムは安定であるとする．特に，$\mu_k=\mu/c$とおくとMAP/M/cモデルに一致する．

$\{A_n;n=1,2,\ldots\},\{D_n;n=1,2,\ldots\}$をそれぞれ時点0以降に客が到着あるいは退去する時点列とする．このとき，MAP/M/1待ち行列の到着過程のALLST $\zeta(s)$は

$$\zeta(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log E[e^{-sA_n}]$$

によって定められる．$\zeta(s)$はMAPパラメータから計算することができる関数である．また，

$$g(s,x)=\zeta(s+x)+\log\frac{\mu}{\mu-x}$$

とし，$x_0>0$を$g(0,x)=0$の解として，

$$\varepsilon(s)=\begin{cases}\{x|-s\le x\le 0\}, & 0\le s\le x_0,\\ \{x|-s\le x\le x_0-s\}, & x_0<s\end{cases}$$

とする．このとき退去過程のALLST

$$\phi(s)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log E[e^{-sD_n}]$$

は以下で与えられる．

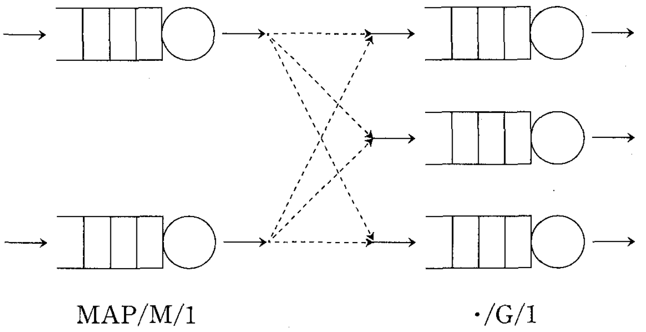
定理1　$s\ge 0$に対して

$$\phi(s)=\inf_{x\in\varepsilon(s)}g(s,x). \tag{2}$$

(2)の$\phi(s)$は$\zeta(s)$とμで決まることから，このMAP/M/1待ち行列の退去過程のALLST（したがって(1)の待ち時間の減衰率も）は，系内人数がc未満のときのサービス率には影響されないことがわかる．待ち時間が十分に長いときは，サーバはサービス率μでフルに活動していると考えられるため，このことは自然な結果であると考えられる．

3．待ち行列ネットワークへの応用

次に1段目がK_1本のMAP/M/1待ち行列，2段目がK_2本の・/G/1待ち行列からなる2段複合直列型待ち行列モデルを考える（図参照）．各ノードから2段目へはノード毎に独立にランダムなルーティングを行うものとする．$K_1=2$，$K_2=3$の時の例を以下に示す．



まず１段目のMAP/M/1からの退去がK_2本のルートに確率分岐するときに，分岐後の過程のALLSTを考える．着目するルート（ルート１とする）へk番目にルーティングされた客の番号をM_kとする．ここで$\{M_1, M_2-M_1, \ldots\}$が独立で同一分布に従うものとし，その確率母関数を$G(z)$とおく．このルーティングは，ノードを各客が独立に選ぶベルヌーイ分岐や，マルコフ分岐モデルなどを含んでいる．このとき，分岐によってルート１へルーティングされる過程のALLSTは$\log G(e^{\phi(s)})(s \geq 0)$で与えられることを示した．

一方Glynn and Whitt（文献[2]）は，複数の独立な過程の重ね合わせによってALLSTがどのように変換されるかを調べている．その結果と上で述べた分岐に対する結果を援用すると，１段目のMAP/M/1がそれぞれ退去過程のALLST$\phi_i(s)(i=1, \ldots, K_1)$，ルーティングの確率母関数$G_i(z)(i=1, \ldots, K_1)$を持つ場合，２段目のノード（ここではノード１とする）への到着過程のALLST$\hat{\phi}(s)$が以下で与えられることが示される．

定理２　$s \geq 0$に対して

$$\hat{\phi}(s)=\sum_{i=1}^{K_1} \log G_i(\exp\{\phi_i(s_i)\}).$$

ここで$s_1, s_2, \ldots, s_{K_1}$は連立方程式

$$\begin{cases} s=\sum_{i=1}^{K_1} s_i \\ \phi_1(s_1)=\phi_2(s_2)=\cdots=\phi_{K_1}(s_{K_1}) \end{cases} \tag{3}$$

の解である．すなわち，各sに対して，方程式(3)から解$s_i(i=1, \ldots, K_1)$を得ることによって$\hat{\phi}(s)$を計算することができる．

上のモデルにおいて２段目のノード１の定常状態での待ち時間をW，２段目のノード１のサービス時間分布のLSTを$h(s)$とする．

定理３　方程式

$\hat{\phi}(s)+\log h(-s)=0$

が解$s=\delta>0$を持つとすると，

$$\lim_{w \to \infty} \frac{1}{w} \log P(W>w)=-\delta$$

が成り立つ．

Fujimotoら（文献[1]）はPH/M/c_1→/PH/c_2待ち行列モデルに対して，ある条件下で(1)より強い結果を示している．本論文の結果はモデルの範囲は制約されるものの，文献[1]の条件が成立しない場合でも定理３によって漸近解析が可能である．また，本論文の解析方法は複数サーバモデルや，文献[4]などに見られる既存の手法では扱えない到着過程やサービス時間分布に対しても適用することが可能である．

マルコフ的な推移を持つ待ち行列ネットワークにおいては，任意のノードへの到着過程はバックグラウンドの状態空間が無限次元のMAPと見なすことができる．そのため，定理１が無限次元状態空間のMAPに対して拡張されれば，３段以上の直列型待ち行列を含むより複雑な非循環型待ち行列ネットワークへの応用が可能となる．この点と，指数サービスをより一般的なサービス時間分布に拡張することが今後の課題である．

主な参考文献

[1] Fujimoto. K.. Takahashi, Y. and Makimoto, N., "Asymptotic properties of stationary distributions in two stage tandem queueing systems," *J. Oper. res. Soc. Japan,* **41**, 118 141. 1998.

[2] Glynn. P.W. and Whitt. W., "Large deviations behavior of counting processes and their inverses," *Queueing Systems,* 17, 107 128, 1994.

[3] Glynn, P.W. and Whitt, W., "Logarithmic asymptotics for steady state tail probabilities in a single server queue," *J. Appl. Prob.,* **31A**, 131 156, 1994.

[4] O'Connell, N., "Large deviations for departures from a shared buffer," *J. Appl. Prob.,* **34**, 753 766, 1997.