論文・研究レポート

待ち行列教育のための公式の新しい図式表現の提案

中西 昌武，木村 敦

1．はじめに

待ち行列問題は、コンピュータのオンライン端末数・駅の改札口数・港の桟橋数・流通ターミナル数の検討などに広く応用されており、情報技術がどのように経営に役立てられているかを示す格好の材料となる。ところが待ち行列モデルそのものの数学的なわかりにくさが初学者の学習の妨げとなっている。

本稿は、初学者の待ち行列理解を助けるための手段としての新しい図化技法を提案するものである。

2．待ち行列の公式

待ち行列は、母集団、到着分布、窓口数、サービス時間分布、待ち行列の（待合室の）容量、サービス順序、によって条件づけられる。入力源数を無限大とする母集団、ランダムな到着分布、指数分布のサービス時間分布、待ち行列の容量制限なし、先着順サービス。以上の条件を与えると、待ち行列は比較的モデルが簡単になる。そこでこのような単純なモデル(M/M/１型)から待ち行列の説明に入るのが一般的である（図１）。

平均到着率 λ は平均到着間隔時間 Ta の逆数、平均サービス率 μ は平均サービス時間 Ts の逆数で与えられる。多くの教科書はこの関係を説明した後、到着分布とサービス時間分布の関係を表すトラフィック強度 $u = Ts/Ta$ および窓口利用率 $\rho = u/c$ の説明に入る。ここで c は窓口の数である。とくに単一窓口の場合には $\rho = Ts/Ta$ である。

ここから待ち行列の公式に到達するには、到着分布およびサービス時間分布の統計理論的な説明を通らなければならない。しかしその分布はかならずしも

なかにし まさたけ　名古屋経済大学　経済学部
きむら あつし　ＮＴＴコミュニケーションウェア㈱
システム開発企画部

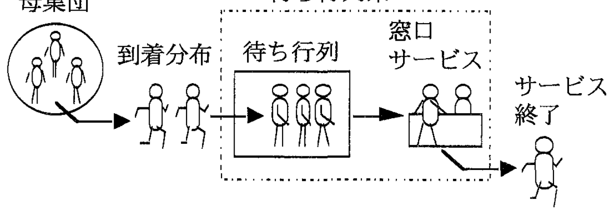

図-1 待ち行列のイメージ

直感的に理解しやすいものではない。ここが最初の関門である。結論として得られるM/M/１型の公式は次のようなものである。

(ｉ)平均待ち時間 $Wq(M/M/1)=\dfrac{\rho}{1-\rho}Ts$ .... (1)

(ii)平均系内時間 $W(M/M/1)=\dfrac{1}{1-\rho}Ts$ .... (2)

(iii)平均待ち数 $Lq(M/M/1)=\dfrac{\rho^2}{1-\rho}$ .... (3)

(iv)平均系内数 $L(M/M/1)=\dfrac{\rho}{1-\rho}$ .... (4)

しかしこの公式もまた初学者にとっては直感的に理解しにくいようである。例えばなぜ $W(M/M/1)$ は $Wq(M/M/1)$ を ρ で割った式となるのかが、よく理解できない。このように式の意味が十分に理解できないので、式の形の類似性から、公式の暗記まちがいを起こしたりする。こういった問題が起きているのである。

3．直感的に理解しにくい公式の形

直感的な理解をさまたげている原因は、どうやら公式の形そのものにあるようである。

運動量から運動エネルギーへ、といったような微積分の関係によって得られる物理量の場合は、人間の空間知覚の助けもあって、公式は比較的理解しやすい。公式にさまざまな値を代入することによって得られる空間知覚のひろがりが対象の理解をより具体的で手応えのあるものとさせてくれる。

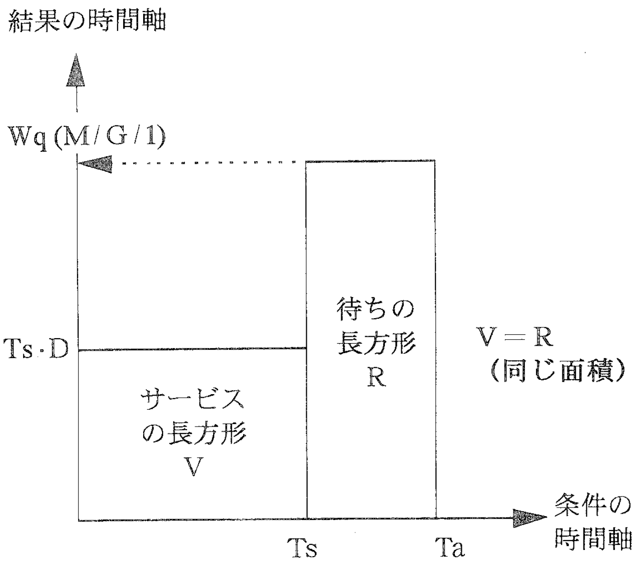

図-2 待ち時間（M/G/1型）のKMK図

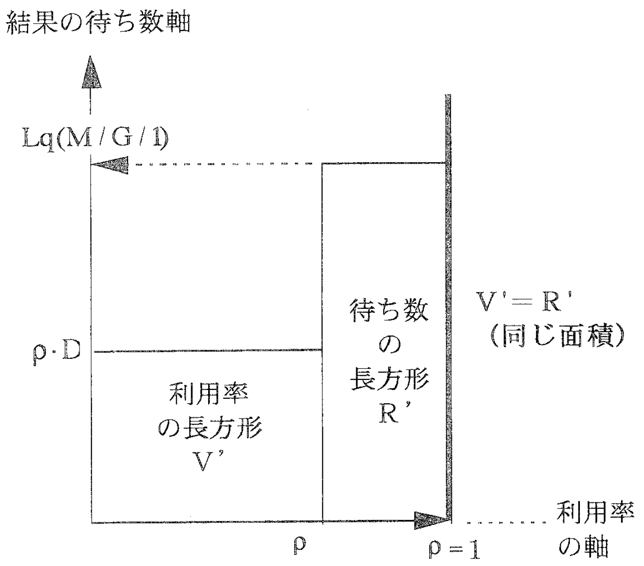

図-3 待ち数（M/G/1型）のKMK図

ところが待ち行列の場合は、変化の様子が人間の類推と異なるために、そのような空間知覚のひろがりを手にしにくい。それが理解の妨げになっているようなのである。

確かに公式は利用率ρを用いることで簡単に表現できるようになった。しかし、公式の単純化は、必ずしも初学者に対し、待ち行列の理解の助けとなるものではないように思われる。

このような反省に立ち、筆者は次のような待ち行列の公式の新たな図式表現（KMK図法）の導入を提案する。この図法は筆者および上野健一郎（日本オラクル(株)）の3人が、NIFTY-Serve FLIC-14で展開した一連の議論（1995年12月の発言番号#3541より議論開始）で提案したものである。KMKという図法名は3人のハンドル名のイニシャルをとったものである。

4．待ち行列の公式の図式表現

ここではM/M/1型やM/D/1型を包含するモデルであるM/G/1型待ち行列（ランダムな到着分布、一般分布のサービス時間、窓口数1）の公式に図式表現の手がかりを求めることにする。

サービス時間の変動係数（分散／平均値^2）をCとすると、M/G/1型の平均待ち時間Wq (M/G/1)は以下のようになる。

$$Wq(M/G/1)=Ts^2\cdot D/(Ta-Ts) \quad \text{....}(5)$$

ここでは　$D=(1+C^2)/2$であり、このDは補正係数と呼ばれる。上の式は、以下のように変形することができる。

$$Wq(M/G/1)\cdot(Ta-Ts)=(Ts\cdot D)\cdot Ts \quad \text{....}(6)$$

また、この式の両辺をTa^2で割ると、待ち行列の長さ（待ち数）に関する次の式が得られる。

$$Lq(M/G/1)\cdot(1-\rho)=(\rho\cdot D)\cdot\rho \quad \text{....}(7)$$

(6)(7)式をもとに、同じ面積を持つ2つの長方形の幾何学的関係を用いた待ち時間・待ち数に関する2つの公式を図で（図2・3）表すことができる。この2つの図は互いに表裏一体の関係にある。

ちなみに、M/M/1型（指数分布）、M/D/1型（一定分布）、M/Ek/1型（アーランk相分布）の分布では補正係数Dが簡単になるので、図中のサービスの長方形や利用率の長方形が描きやすくなる。

5．KMK図法（M/M/1型）

5.1 M/M/1型（待ち時間）のKMK図法

ここでは、もっとも図式表現が簡単になるM/M/1型を取り上げて、その使い方を説明する。M/M/1型では、Dの係数が消えて左側の四角形が「正方形」となり初学者が覚えやすい図となる（図4）。

はじめに＜条件の時間軸＞を横軸に、＜結果の時間軸＞を縦軸に取る。

次に、2つの四角形を用意し、図2と同じく「条件の時間軸」上に並べる。

左側：サービスの正方形（面積V）
　　　平均サービス時間Tsの正方形である。
右側：待ちの長方形（面積R）
　　　（平均到着間隔時間Ta－平均サービス時間Ts）

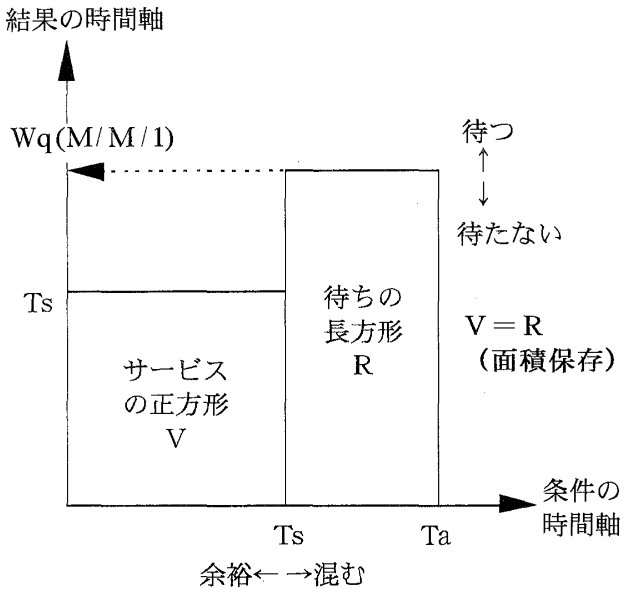

図-4 待ち時間（M/M/１型）のＫＭＫ図

を底辺、平均待ち時間 Wq(M/M/1) を高さとする長方形である。

平均サービス時間　Ts　は自分が設定できる条件である。縦軸の平均サービス時間はM/M/１型待ち行列におけるその反映である。平均到着間隔時間　Ta　は、あらかじめ予測しておくべき条件である。平均待ち時間 Wq(M/M/1) は以上の結果である。

ここで、サービスの正方形の右に並べる待ちの長方形の面積を、常にサービスの正方形と同じになるようにすれば、(6)式の関係により、平均待ち時間 Wq(M/M/1) は常に待ちの長方形の高さとして求められるようになる。サービスの正方形と待ちの長方形のこのような面積関係の性質を「ＫＭＫ図法の面積保存の法則」と呼ぶことにする。ここでは「法則」概念を、初学者の学習を容易にさせるための方便として用いている。

V＝R　(M/M/1型の面積保存の法則)
$V = Ts^2$　,　$R = Wq(M/M/1)\cdot(Ta - Ts)$

この図を覚えると、初学者は、この図から、

$$Wq(M/M/1) = \frac{Ts^2}{Ta - Ts} \quad \cdots\cdot (8)$$

にたどり着くことができる。さらに、利用率ρ（または窓口数１におけるトラフィック強度 u ）が、条件の時間軸上におけるTaとTsの相対的な位置関係を示す指標であることを理解させることもできる。

また、このρを用いて(8)式を整理すると、平均待ち時間の公式(i)までたどり着けるので、初学者の公式暗記の苦痛を除去することが期待できる。なお初学者に図を描かせる場合は、サービスの「正方形」から描かせると間違いが少ない。

5.2 ＫＭＫ図法（待ち時間）によるM/M/１型待ち行列の性質の把握

ここで、Tsを変えることによりどのように平均待ち時間が変わるかを、図の変化を通してシミュレートしてみよう。

窓口の処理能力を落とし平均サービス時間Tsを平均到着間隔時間Taに近づけると、次第に行列が混んでくる。その結果 V＝R の面積保存の法則により、長方形は縦に長くなり、平均待ち時間 Wq(M/M/1) が長くなる。

最終的に、TsがTaに重なるとき、つまりρ=1のとき、長方形は縦につぶれ平均待ち時間は無限大となる。これは待ち行列がバースト（待ち行列系のパンク！）を起こしたことを意味する。その逆にTaが十分に大きいか、Tsを十分小さくすれば、長方形は横長になり平均待ち時間の小さい余裕のある待ち行列とすることができる。

つぎに平均サービス時間Ts・平均到着間隔時間Ta・平均待ち時間Wq(M/M/1)の比について考える。面積保存の法則から、平均サービス時間Ts、平均到着間隔時間Ta、平均待ち時間 Wq(M/M/1) の３つの時間条件のうち２つの比が同じなら残る１つの時間条件の比も同じ、つまり図形が相似形の状態で拡大縮小することが導かれる。平均サービス時間がN倍になり平均到着間隔時間がN倍になると、平均待ち時間もN倍になる。このような性質を「相似の法則」と呼ぶことにする。

(M/M/1型の相似の法則)
$\frac{Ts\,1}{Ts\,2} = \frac{Ta\,1}{Ta\,2} = N$　ならば　$\frac{Wq1(M/M/1)}{Wq2(M/M/1)} = N$

筆者の経験では、待ち行列の知識のない初学者に同じ問いをすると「平均待ち時間は変わらない」と答えるものが多いが、図の練習を通じて相似の法則を覚えさせるとこうした間違いが少なくなる。

またF＝1/ρが整数である必要はないが、M/M/1型においてFが整数の時は平均待ち時間が平均サービス時間の整数(F－１)分の１となる。この関係を法

則として覚えさせると、Wq(M/M/1)、Ta、Ts 同士の相対的な大きさがイメージしやすくなり、初学者の理解の助けとなる。

(M/M/1型の整数倍の法則)

Fが整数であるとき、

$Ta = F \cdot Ts$　ならば　$Wq(M/M/1) = \dfrac{Ts}{F-1}$

5.3 M/M/1型（待ち数）のKMK図法

(iii)の平均待ち数の公式をそのまま利用すると、平均待ち数Lq(M/M/1)のKMK図を作ることができるが、ここでは前節の平均待ち時間　Wq(M/M/1)のKMK図から時間のパラメータを消して待ち数の公式のKMK図にたどり着く方法を説明する。

図4の条件の時間軸及び結果の時間軸をそれぞれTaで割り、ρを用いて(8)式を整理し、リトルの公式　Lq(M/M/1)＝Wq(M/M/1)/Ta　を適用すると、M/M/1型待ち行列における待ち数に関する面積保存を表す以下の式が得られる。

$$Lq(M/M/1)\cdot(1-\rho)=\rho^2 \quad \text{.... (9)}$$

初学者に2つの図のこのような変換関係を覚えさせると、初学者は、平均待ち時間の図から出発して待ち数の図とこの式を経由して、容易に平均待ち数の公式(iii)にたどり着けるようになる。

(9)式の関係を、図4と同じように図示すると図5のようになる。

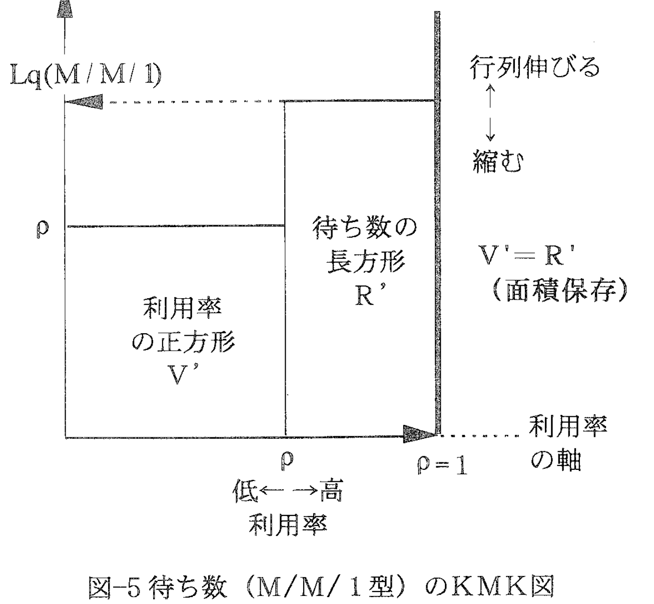

図-5 待ち数（M/M/1型）のKMK図

平均待ち時間と平均待ち数が表裏一体の関係にあることは、図4・5の双対関係から容易に理解することができる。

図5は、平均待ち数Lq(M/M/1)が利用率ρによって一意に定まることを如実に表している。利用率ρは1よりも大きくならない。初学者は、利用率ρが1に近づくときに平均待ち数 Lq(M/M/1) がどのように増大し、待ち行列系がバーストしてゆくかを直感的に理解することができる。

5.4 M/M/1型（系内時間）のKMK図法

平均系内時間は、平均待ち時間と平均サービス時間Tsの和である。M/M/1型の場合、図6のようにサービスの正方形とちょうど同じ高さまで待ちの長方形を持ち上げたKMK図として表すことができる。公式(ii)は、この関係をρで整理してしまったために、かえって分かりにくい式となっている。ここではρを用いずに平均系内時間を表現することにする。

初学者は図6の作図方法を覚えるだけで、平均到着間隔時間Taと平均サービス時間Ts、もしくは、利用率ρと平均サービス時間Tsから、待ち行列系内に滞在する時間W(M/M/1)を求めることができる。

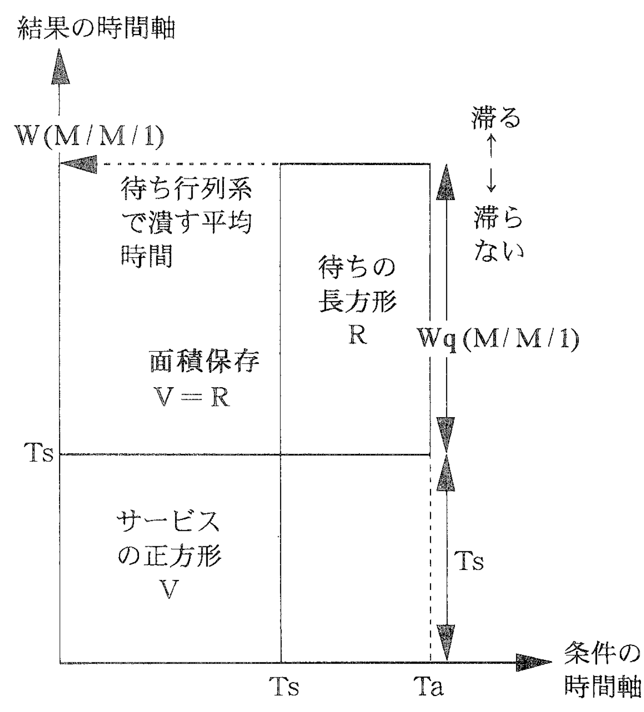

図-6 系内時間（M/M/1型）のKMK図

5.5 KMK図と待ち行列のグラフとの関係

待ち行列でよく使われる平均待ち時間や平均待ち

数のグラフとKMK図との関係について簡単に触れておく。KMK図において待ち数の長方形は利用率の変化に対し面積保存の法則に従って変化する。すると利用率と平均待ち数および平均系内数の関係を表すグラフは、図8のように、平均待ち数および平均系内数をそれぞれ表す待ち数の長方形の左上端点が描く軌跡として理解することができる(ただし図8は、縦軸の縮尺を変えたため、左側にある利用率の正方形がつぶれて見えている)。

またこの図の縦軸のみをTa倍すると、利用率と平均待ち時間および平均系内時間の関係を表すグラフを描くことができる。

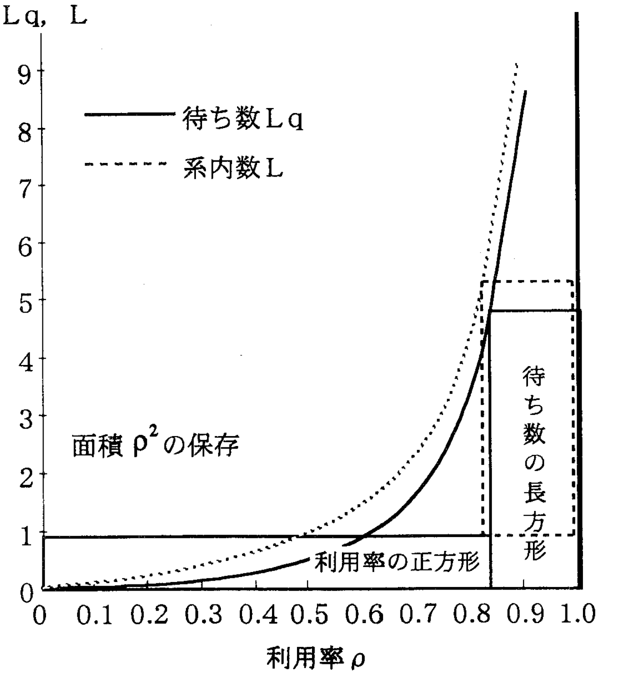

図-7 利用率と待ち数・系内数の関係(M/M/1型)

KMK図は、図法による待ち行列理解のアプローチであるといえる。公式を覚えるのが苦手な初学者でも、さほど苦痛なくこの図を作成することができる。最初にKMK図を書かせてしまえば、初学者は2つの四角形の幾何学的関係を用いて容易に待ち行列の公式(i)~(iv)までたどり着くことができる。

6. KMK図法(M/M/c型)

6.1 M/M/c型(待ち時間)のKMK図法

次に、M/M/c型(複数窓口:窓口数c)における面積保存の法則を考える。M/M/c型はM/M/1型の応用型として考察可能である。ただしM/M/c型の場合、複数窓口による偶然誤差の相殺効果を考慮しなければならない。

c個の窓口がすべてふさがっている確率をここでは「ビジー確率」と呼び、b_cで表すことにする。ビジー確率は、窓口に一人もいない確率をp_0とするとき、以下の式で求められる。

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{c^n}{n!}\rho^n + \frac{c^c}{c!\cdot(1-\rho)}\rho^c} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$b_c = \frac{c^c}{c!\cdot(1-\rho)}\rho^c \cdot p_0 \quad \cdots\cdots (11)$$

M/M/c型における平均待ち時間、平均系内時間、平均待ち数、平均系内数は以下の公式で表される。

(v) 平均待ち時間

$$Wq(M/M/c) = b_c \cdot \frac{Ts}{c(1-\rho)} \quad \cdots\cdots (12)$$

(vi) 平均系内時間

$$W(M/M/c) = b_c \cdot \frac{Ts}{c(1-\rho)} + Ts \quad \cdots\cdots (13)$$

(vii) 平均待ち数

$$Lq(M/M/c) = b_c \frac{\rho}{1-\rho} \quad \cdots\cdots (14)$$

(viii) 平均系内数

$$L(M/M/c) = b_c \frac{\rho}{1-\rho} + u \quad \cdots\cdots (15)$$

ここでビジー確率の性質は以下の通りである。

$\rho \to 0$ のとき $b_c \to 0$

$\rho \to 1$ のとき $b_c \to 1$

$c \to$ 大 のとき $b_c \to$ 小

以上をもとに、M/M/c型における平均待ち時間に関する面積保存の公式を図式表現する。(12)式は、以下のように変形できる。

$$Wq(M/M/c)\cdot(Ta\cdot c - Ts) = (Ta\cdot b_c)\cdot Ts \quad \cdots\cdots (16)$$

ここでは右辺の$(Ta\cdot b_c)\cdot Ts$が保存対象面積となる。この関係を図示すると、図8のようになる。

(平均サービス時間×平均到着間隔時間)の「サービスの長方形」と、(平均到着間隔時間×窓口数c－平均サービス時間)を底辺とする「待ちの長方形」を「条件の時間軸」上に並べる。

ただしM/M/c型における面積保存の対象はサービスの長方形ではなく、利用者が到着したときに窓口が全部ふさがっている確率(ビジー確率)b_cだけサービスの長方形よりも背が低い長方形(ここではビジー長方形と呼ぶ)となる。

待ちの長方形の面積Rを、常にビジー長方形の面積Vbと同じにするとき、待ちの長方形の高さは、

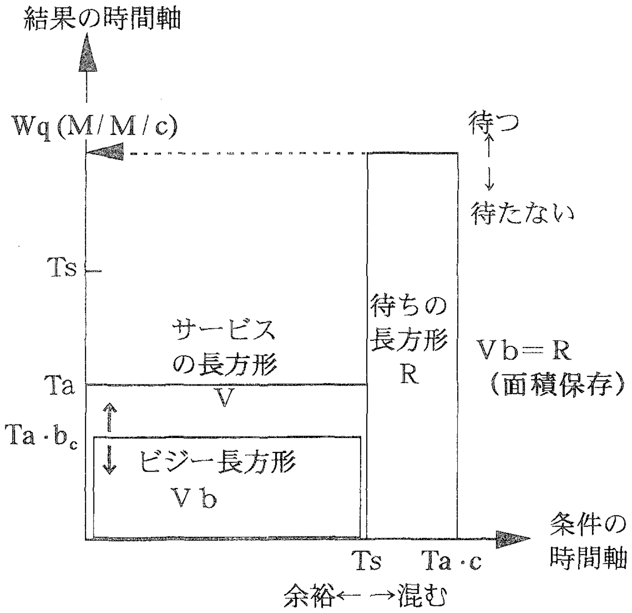

図-8 待ち時間（M/M/ｃ型）のＫＭＫ図

平均待ち時間 Wq(M/M/c) を示す値となる。

M/M/1型との違いは、「サービスの正方形」を「ビジー長方形」に置き換えた点と、「平均到着間隔時間」を「平均到着間隔時間×窓口数ｃ」に置き換えた点の２点である。

また、M/M/ｃ型における待ちの長方形の底辺には、Ta－Tsではなくて Ta・c－Ts を用いる。この図を覚えると、初学者はこの図から、

$$\mathrm{Wq(M/M/c)} = \frac{(\mathrm{Ta} \cdot b_c) \cdot \mathrm{Ts}}{\mathrm{Ta} \cdot c - \mathrm{Ts}} \qquad \ldots.(17)$$

を経由して、利用率　ρにおけるM/M/ｃ型の待ち時間および系内時間の公式(v)(vi)にたどり着くことができる。

ここで、Tsを変えることにより待ち時間がどのように変化するかを、図の変化を通してシミュレートしてみる。

M/M/ｃ型の場合はビジー長方形の変化の仕方に注目する。Ts　が小さいときは、ビジー確率　が小さいのでビジー長方形の形は、サービスの長方形に比べ扁平した形となる。TsがTa・cに近づき利用率が1に近づくと、ビジー確率もまた１に近づき、ビジー長方形はサービスの長方形と同じ形に近づく。

サービス時間Tsが長くなるとともに、Vb＝Rの法則に従って、待ちの長方形は縦に長くなり平均待ち時間 ρ が長くなる。Ts が Ta・c に重なるとき、待ちの長方形が縦につぶれ（まさにパンク！）平均待ち時間が無限大となる。このとき利用率は１となる。その逆に、Taが十分に大きいか、ｃ を十分多くするか、またはTs を十分小さくすれば、待ちの長方形が横長になり平均待ち時間の小さい余裕ある待ち行列となる。この動き方は、M/M/1型と同じである。

なお図８の縦横の時間軸をTaで割ると、M/M/1型のときと同様にM/M/ｃ型の平均待ち数および平均系内数の公式(vii)(viii)の図式表現が行える。

6.2 M/M/ｃ型における「相似の法則」

M/M/ｃ型においても相似の法則が成立することを確認する。Ta , Ts をそれぞれN倍しても、利用率 ρ　は不変である。従って b_c もまた不変である。その結果、ビジー長方形の保存面積(Ta・b_c)・Ts が N^2 倍、また待ちの長方形の底辺Ta・c－TsがN倍となることから、面積保存の法則によってWq(M/M/c) はN倍となる。よって、M/M/ｃ型においても「相似の法則」は成立する。ただし「整数倍の法則」はM/M/ｃ型では成立しない。

6.3 初学者への説明におけるビジー確率 b_c の扱いについて

初学者への説明におけるM/M/ｃ型におけるビジー確率b_cの扱いだが、b_cは幾何学的に表現できない値のため、ＫＭＫ図法では利用率に応じてサービスの長方形を扁平化する値としてb_cを処理している。もしb_cについて詳細な説明をしようとすれば初学者が苦手とする確率論的な説明に入らざるを得なくなる。

これについては、6.1で述べた、$\rho \to 0$ のとき $b_c \to 0$、また$\rho \to 1$ のとき$b_c \to 1$となる性質だけでもKMK図（M/M/ｃ型）を用いた簡略なシミュレーションは可能なので、ＫＭＫ図を動かす練習でM/M/ｃ型を直感的に理解させてからb_cの数学的構造の説明に入ったほうが、初学者の抵抗感が少ないかも知れない。ただし複数窓口による偶然誤差の相殺効果をどのように初学者に分かりやすく説明するかについては別途検討が必要である。

7. まとめ

先にも述べたように、利用率ρによる待ち行列の公式は、いずれも式の意味が初学者に分かりにくいものとなっている。また(i)～(iv) のM/M/1型の公式と(v)～(viii)　のM/M/ｃ型の公式を見比べてみても、相互の構造的な対応関係がわかりにくい。

このような状態のまま初学者を放置すると、初学者は、学習の拒絶か、公式の丸暗記のいずれかを選ぶようになり、待ち行列の持つ構造的な面白さを知ることなく待ち行列嫌いとなってしまうであろう。

KMK図法は、幾何学的なイメージによる理解を出発点とするので、図が描ければ初学者は公式を覚えていなくても待ち行列の特徴を理解することができる。また、公式だけ見ても判然としなかった「待ち時間と待ち数の表裏一体関係」も、この図を用いて分かりやすく説明できるようになる。統計理論による説明は、KMK図法によって待ち行列のイメージが掴めるようになった段階であらためて行えばよい。

参考文献

[1]森村英典・大前義次，『応用待ち行列理論』，日科技連，1975年.

[2]高橋幸雄，「やさしい待ち行列(1)-(4)」『オペレーションズ・リサーチ』，1995年11月－1996年1月.

[3]佐伯胖，『考えることの教育』，国土社，1983年.