【書評】

Shu-Cherng Fang, J.R. Rajasekera and H.S.J. Tsao 著

Entropy Optimization and Mathematical Programming

Kluwer Academic Publishers 343頁 1997年

エントロピーと聞くと，実感がわかず，敬遠しがちであるが，本書は数学を専門としないエンジニアにとっても無理なく読める本である．

歴史的には，エントロピーの概念は熱力学で導入され，energyに類似したギリシャ語の言葉から命名されたそうだ．その後，1948年，Von Neumannの助言もあって，Shannonの情報理論で不確実性の尺度として再登場した．同一の概念ではあるが，今では，情報理論でのエントロピーの方がその意味付けもわかりやすく，有名である．

第1章は，エントロピーの数学的定義である．確率分布ベクトル$\mathbb{P}=(p_1, p_2, \ldots p_n)$が与えられた時，対応するエントロピーHは次式で与えられる点は納得してもらおう．

$H(\mathbb{p})=-\sum p_j \ln p_j$

エントロピーの関数形として，これ以外のものが考えられるか，読者は考えてほしい．次に，2つのベクトル$\mathbb{p}, \mathbb{q}$が与えられた時に，$\mathbb{p}$から$\mathbb{q}$への距離みたいなものDを次式で与える．

$$D(\mathbb{p}, \mathbb{q})=\sum p_j \ln\left(\frac{p_j}{q_j}\right)$$

「距離みたいなもの」といったが，距離公理を満足しないので，正確にはone-wayeviation measureあるいはdirected divergenceと呼ぶ．エントロピーの用語を用いるならば，$D(\mathbb{p}, \mathbb{q})$はクロスエントロピーとなる．

2章，はエントロピー最適化モデルの紹介である．エントロピー最適化モデルは，「何らかの制約下のもとでのエントロピー最大化あるいはクロスエントロピー最小化」と定式化できる．ここでの制約とは，対象とする問題ごとに異なりうるが，何らかの手段（たとえば，測定）により得られた情報と考えられる．したがって，エントロピー最適化モデルとは，入手可能な情報を制約条件として，なるべくばらつきの大きい，すなわち，ある意味で自然体の解を求めるアプローチと考えられる．待ち行列理論での応用として，系内呼数の平均値の測定値が入手可能な時にその分布を推定する問題，輸送・交通トラヒック関係の応用として，O-Dトラヒック推定問題がとり上げられている．これ以外にも，ポートフォリオ配分，Leontiefの入出力分析，都市・地域計画，画像処理への応用がある．

3章，4章は，エントロピー最適化モデルを解くアルゴリズムについてであり，各々線形制約の場合と凸制約の場合を扱っている．

5章では，エントロピー的摂動法を数理計画法における罰金法，障壁法に適用した．カーマーカー形式の線形計画問題，凸2次計画問題，線形凸2次半無限計画問題について理論を展開している．ただし，ここでの「エントロピー的」とは，不確実性の最大化の概念とはあまり関係はなさそうで，単に罰金関数，障壁関数が$\sum x_j \ln x_j$の形をしているがゆえの命名法である．

6章では，Lp－ノルム摂動アプローチについて述べている．エントピー的関数で主目的関数を摂動することが双対実行可能領域をLp－ノルムで摂動することに対応する点に注目している．

最後に7章では，可算個の多くの変数を持つ場合，ベイズ統計推定との関係，最小最大化問題を解くためのエントロピー的正規化法について述べている．応用例として，幾何分布がエントロピー最大化モデルの自然な解として得られることが示されている．

OR学会員にとってはなじみやすい数理計画法を道具に使って，エントロピーを用いた最適化の諸問題をモデル化し，解法アルゴリズムを解説した点が本書の特徴である．なじみにくいエントロピー最適化のモデルを数理計画法という枠組でとらえた結果，現実で直面する各種の問題を統一的に扱うことができた．さまざまな分野に従事するORワーカー，OR学会員が直面する諸問題に対して，その答えは「エントロピー最大化の意味で自然体の形をとる！」というエントロピー教を信じるならば，本書は見通しのよい問題解決の手段を不確実な現代社会において与えるだろう．

ぜひ一読を！

（NTT 篠原正明）