講座

待ち行列研究の新しい潮流 (3)

相型分布と行列解析法

高橋 幸雄，牧本 直樹

1. はじめに

待ち行列研究の流れが大きく変化した要因のひとつに，計算機の発達とそれに支えられた数値解析法の研究の進展があった．本稿では，待ち行列に対する数値解析法とそれから派生した相型分布や行列幾何形式解などの理論的研究がどのように進んできてどこまで到達したかを紹介する．ただし数値解析法は大変幅広く研究されており，その全容をここで紹介するのは難しい．ここでは，1975 年頃に始まったいわゆる Neuts 流の Algorithmic approach（アルゴリズム的方法論）の流れを追いながら，それに関係するトピックを中心に話を進めることをお許し願いたい．なお本稿は，2, 5 節を高橋が，3, 4 節を牧本が担当した．

2. マルコフ連鎖による数値解析

待ち行列モデルをマルコフ連鎖に帰着して解析するという方法論は，Erlang による $M/M/s$, $M/D/s$ の研究以来，待ち行列研究のもっとも標準的なアプローチとしてずっと用いられてきた．そして「マルコフ連鎖に帰着されれば，あとは数値的に定常状態確率を求めて計算すればよい」という考えも，$M/G/1$ に対する隠れマルコフ法 (imbedded Markov chain method) や $E_k/E_r/s$ の相による方法 (method of phases) などに採用されていた．しかし，これらは比較的特殊なモデルに適用が限定される方法と考えられていた．

ところが，応用上たいへん重要な $M/G/s$ が従来の方法では解析できないことが 1966 年に Kingman によって明らかにされた．これは待ち行列研究における最大のピンチであった．この問題の解決にマルコフ連鎖の数値的方法を利用することを考えたのは，恐らく筆者ばかりではなかったであろう．それでも筆者の論文 [22] がその先駆けのひとつとなったのは幸運であった．

これは 1976 年の JORSJ に掲載された論文で，いまの言葉で言えば，“Aggregation/Disaggregation 法 (A/D 法) を利用すると $PH/PH/c$ モデルの定常状態確率が効率的に数値計算できる” ことを示したものであった．今振り返ってみると，この論文の中で使った新しい考え方はつぎの 3 つであったように思う．

a) 吸収的 Markov 連鎖で表現できる分布 (相型分布)
b) Lumping 法 (A/D 法)
c) 系内人数分布の裾の幾何的減衰

この論文を書いたとき，その後これらが現在のような形に発展していくとはとても想像できなかった．

この論文に最初に反応したのは，Marcel F. Neuts であった．彼はすでにこのような考えを持っていたのか，筆者が送った preprint を読んで気がついたのかは定かではないが，すぐに a) の Markov 連鎖で表現できる分布のクラスというのが研究の対象となりうると考えたようで，[10] で phase-type distribution (相型分布) というネーミングを与え，研究を開始した．さらに c) の分布の裾にも興味を持ち，$GI/M/1$ モデルの結果を参考にして，Matrix-geometric form solution (行列幾何形式解) という新しい理論体系を作った．これをまとめたのが [12] の著書である．本稿では，3 節で相型分布の発展とその後を，4 節で行列幾何形式解にまつわるいろいろな研究とその後の発展を紹介する．

もうひとり，この論文に興味を示したのが Paul J. Schweitzer であった．彼も b) の数値計算法とほとんど同じアイディアを持っていたようであるが，たいへんフェアな態度で筆者の業績を認めてくれた．彼はその後もこの数値計算法を紹介する論文を書いたり，さらに他の Linear models への拡張なども行っている．5 節では，この A/D 法とそれに関連する数値解析法の話題をいくつか紹介する．

たかはし ゆきお　東京工業大学大学院情報理工学研究科
〒152-8552　東京都目黒区大岡山 2-12-1
まきもと なおき　筑波大学大学院経営政策科学研究科
〒112-0012　東京都文京区大塚 3-29-1

3. 相型分布と MAP

3.1 相型分布と構造的マルコフ連鎖

1つの吸収状態と有限個の一時的状態からなる状態空間上を推移する連続時間マルコフ連鎖を考える．初期分布に従ってスタートしてから吸収状態に吸収されるまでの時間は，初期分布と推移速度行列によって定まる非負確率変数となる．このように，有限次元吸収マルコフ連鎖の吸収時間分布として定まる確率分布を相型分布 (phase–type distribution) と呼ぶ[3]．

相型分布は，アーラン分布や超指数分布などいわゆる相によって表現される分布を一般化した分布族で，待ち行列モデルの Algorithmic approcah において中心的な役割を担っている．その主な理由は，

1. $[0,\infty)$ 上のどのような分布も理論的には任意の精度で相型分布による近似が可能である．
2. 到着間隔分布やサービス時間分布が相型分布で与えられる相型待ち行列は，一般に構造を持ったマルコフ連鎖として定式化できる．

の2つであろう．これらの性質により，M/G/s のように従来の方法では解析できないモデルに対しても，一般分布を相型分布で表現（あるいは近似）して構造的マルコフ連鎖を構成し[4]，後述する行列解析法や数値計算法を適用する，というアプローチが可能となる．

到着間隔分布やサービス時間分布が一般分布に従う待ち行列モデルをマルコフ連鎖として定式化するためには，システム内客数に加えて残余到着間隔や残余サービス時間を補助変数として状態に取り込む必要がある（シリーズ第2回を参照）．しかし，このようにして得られるマルコフ連鎖は連続状態空間をもつため，計算機による数値解析には不向きである．一方，到着間隔分布やサービス時間分布が相型分布の場合は，系内数と到着間隔分布やサービス時間分布の相の組がマルコフ連鎖をなし，その状態空間は離散的である．例えば，PH/PH/1 待ち行列の時点 t における系内数 $N(t)$，到着間隔の相 $I(t)$，サービス時間の相 $J(t)$ の組 $\boldsymbol{X}(t)=(N(t),I(t),J(t))$ は $\mathcal{N}\times\mathcal{I}\times\mathcal{J}$ 上のマルコフ連鎖となる．ここで，$\mathcal{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，また $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ はそれぞれ到着間隔とサービス時間の相の集合を表す．また，系内数が n である状態集合をレベル n, $\mathcal{L}_n=\{(n,i,j);i\in\mathcal{I},j\in\mathcal{J}\}$ とし，推移速度行列をレベル間の推移で分割して表すと

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{O} & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1}$$

というブロック3重対角構造をもつ[5]．このようなマルコフ連鎖に帰着される待ち行列は PH/PH/1 に限らず，複数サーバモデル PH/PH/c や中間バッファが有限の直列型待ち行列など広範囲に渡っている．また，マルコフ連鎖が持つこのような構造は，4節の行列解析法や5節の数値計算法を研究する上で大きな役割を果たしている．

3.2 相関を持つ入力過程

相型待ち行列モデルの研究が進む一方で，1980年頃から到着間隔が独立でない入力過程や，そのような入力を持つ待ち行列モデルの研究も進められた．例えば，有限状態空間上を推移する連続時間マルコフ連鎖を考え，連鎖の状態が i の間は率 λ_i のポアソン過程に従ってパケットが到着するモデルが提案されている．このような入力過程はマルコフ変調ポアソン過程 (Markov Modulated Poisson Process; MMPP) と呼ばれ，一般に再生過程とはならない．また，Neuts [11] は，到着の発生がマルコフ連鎖の状態推移にも依存するように拡張することで，N–process と呼ばれる広いクラスの入力過程を提案している．

このように再生過程ではない入力過程が提案された背景には，(i) 独立な再生過程の重ね合わせは一般に再生過程とはならない，(ii) 入力が再生過程であっても退去は一般に再生過程にならない，という基本的な事実がある．そのため，複数の情報源からのデータを多重化して送信するシステムや，ネットワークモデルの性能評価においては，非再生型の入力過程を導入する必要が生じる．また，1980年代後半から ATM ノードの性能評価が問題になると，入力過程が持つバースト性のモデル化に適しているという理由も加わり，上に挙げたような入力過程が注目を集めるよう

[3]離散時間マルコフ連鎖を基にすれば，同様にして離散相型分布を考えることができる．

[4]与えられた相型分布を表す吸収マルコフ連鎖は一意ではないため，なるべく状態数が少なく単純な表現を求めるための手続きやデータからパラメータを推定する方法などが研究されているが，未解決の問題も多い [9]．

[5]quasi–birth–and–death process（準出生死滅過程）と呼ばれる．

になった．

これらの入力過程の中で，現在最も広く使われているのは，マルコフ型入力過程（Markovian Arrival Process; MAP）であろう [6, 13]．MAP では，有限状態空間上のエルゴード的マルコフ連鎖を考え，状態推移が起きたときに，その推移に対して予め付与された確率で到着が発生し，それ以外の確率では到着は起こらずマルコフ連鎖の状態のみが変化する．このように到着の発生を状態推移と連動させることにより，MMPP を含む広い範囲の到着過程を表現することが可能となる．実際，どのような単純定常点過程も MAP の極限として記述することができる [1]．

相型分布と同様に，MAP 入力を持つ待ち行列モデルも MAP の相を状態として取り込むことにより構造的マルコフ連鎖に帰着されるため，種々の解析法や数値計算法が適用可能である．また，独立な MAP の重ね合わせは MAP となる，MAP からのランダムな抜取りは MAP となる，など MAP は入力過程に対する基本操作に関して閉じており，その意味でも扱いやすい入力過程であると言える．

なお，これまで述べた流れとは独立に，相型分布を複数の吸収状態に拡張して得られる位相型マルコフ再生過程が町原氏によって提案されている [8]．また，集団到着に関しては，位相型マルコフ再生過程に集団到着を加えた複合位相型マルコフ再生過程，MAP に集団到着を加えた BMAP（Batch Markovian Arrival Process），最初に述べた N–process はいずれも等価な確率過程である [7, 19]．

4. 構造的マルコフ連鎖と行列解析法

4.1 GI/M/1 型マルコフ連鎖と行列幾何形式解

よく知られているように，M/M/1 や GI/M/1 待ち行列の定常分布は幾何分布となる．すなわち，到着直前のシステム内客数が n である定常状態確率 π_n は，

$$\pi_n = (1-\eta)\eta^n, \qquad n = 0, 1, \cdots \tag{2}$$

で与えられる．$\eta \in (0,1)$ は，到着間隔分布とサービス率から定まる定数で，M/M/1 ではトラヒック密度に一致する．これに対して，相型待ち行列に対応するある種の構造的マルコフ連鎖では，ベクトル形式の幾何分布とでも呼ぶべき形の定常分布が存在することが知られている．

$X_n = (N_n, K_n)$ を 2 次元状態空間 $\mathcal{N} \times \mathcal{K}$，$\mathcal{K} = \{1, \cdots, K\}$ 上の離散時間マルコフ連鎖としよう．N_n の値によって状態空間をレベル $\mathcal{L}_n = \{(n,k); k \in \mathcal{K}\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$ によって分割し，レベル間の推移を部分行列で表したときに，推移確率行列が

$$P = \begin{pmatrix} B_1 & B_0 & O & O & \cdots \\ B_2 & A_1 & A_0 & O & \cdots \\ B_3 & A_2 & A_1 & A_0 & \cdots \\ B_4 & A_3 & A_2 & A_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3}$$

で与えられるものとする．待ち行列モデルにおいて，到着直前の系内数を N_n，サービス時間や到着の相を K_n とする隠れマルコフ連鎖は，通常このような構造を持つ[6]．このマルコフ連鎖の定常状態確率を $\pi_{(n,k)}$ とし，レベル n に対応する定常状態確率ベクトルを $\pi_n = (\pi_{(n,k)}; k \in \mathcal{K})$ で表す．すると，公比行列と呼ばれる非負正方行列 $\boldsymbol{R}$ が存在して

$$\pi_n = \pi_1 \boldsymbol{R}^{n-1}, \quad n = 2, 3, \cdots \tag{4}$$

が成り立つことが示される [12]．(4) は，幾何分布 (2) のベクトル–行列版に相当し，行列幾何形式解 (matrix–geometric form solution) と呼ばれる．$\boldsymbol{R}$ は非線形行列方程式

$$\boldsymbol{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{R}^n A_n \tag{5}$$

を満たす非負最小解として特徴付けられ，原理的には $\boldsymbol{R}(0) = O$ からスタートして逐次代入

$$\boldsymbol{R}(k+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{R}^n(k) A_n, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{6}$$

の極限として求めることができる．また，状態確率ベクトル π_0，π_1 は平衡方程式と正規化条件から

$$\begin{cases} \pi_0 B_1 + \pi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{R}^n B_{n+2} = \pi_0, \\ \pi_0 B_0 + \pi_1 \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{R}^n A_{n+1} = \pi_1, \\ \pi_0 \mathbb{1} + \pi_1 (I - \boldsymbol{R})^{-1} \mathbb{1} = 1 \end{cases} \tag{7}$$

を解いて得ることができる[7]．

これらの結果は，M/M/1 や GI/M/1 で観察される定常分布の単純な構造が，一般的な待ち行列モデル

[6] (3) は GI/M/1 待ち行列の隠れマルコフ連鎖の拡張になっているため GI/M/1 型と呼ばれる．

[7] $\mathbb{1}$ は単位列ベクトル，I は単位行列を表す．

に拡張できることを示すと同時に，無限次元の定常状態確率ベクトルが，線形方程式系 (7) と公比行列 $\boldsymbol{R}$ という有限次元の要素によって決定されることを明らかにしている点で重要である．元来，Algorithmic approach の狙いはこの点にあったと考えられる．つまり，(5) を基に $\boldsymbol{R}$ を効率的に求めることができれば，定常分布は (4), (7) から容易に計算することが可能となる．そのため，(6) の逐次代入も含めて公比行列 $\boldsymbol{R}$ に対する種々のアルゴリズムがこれまでに提案されており，またそれらの比較も行われている [4, 5].

数値計算法の開発の一方で，行列幾何形式解から派生した行列解析法（matrix–analytic method）は理論的にも大きく発展し，現在では待ち行列解析の1つの理論体系を成している．例えば，2節で述べた系内人数分布の裾の幾何的減衰は行列幾何形式解によって説明することができる（この問題に関する解説がこのシリーズの第5回に予定されている）．また，ネットワークモデルでは，各レベルが可算無限の状態からなるマルコフ連鎖が現れるが，そのような連鎖に対する行列幾何形式の体系も徐々に整いつつある．さらに，系内数分布の行列幾何形式解に対応して，連続量である待ち時間分布の行列指数形式解（matrix–exponential form solution）などの研究も行われている [17].

4.2 M/G/1 型マルコフ連鎖

GI/M/1 と逆に，待ち行列モデルにおいて退去直後の状態で隠れマルコフ連鎖を構成すると

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{8}$$

という構造を持つマルコフ連鎖が現れる（M/G/1 型と呼ばれる）．例えば，MAP/G/1 待ち行列の退去直後の系内数と到着の相の組は，系内数でレベル分けをすれば (8) の形のマルコフ連鎖となる．(8) と (3) の構造から 2 つのマルコフ連鎖の間にはいくつかの双対的な関係があるが [2], (8) の定常分布は行列幾何形式解にはならず，陽表現を求めることは難しい．にも関わらず，構造をうまく利用することで効率的な数値計算法や多くの理論的結果が得られている．

M/G/1 型マルコフ連鎖では，あるレベルから 1 つ下のレベルに初めて到達したときの相の推移を表す確率行列 $\boldsymbol{G}$ が重要な役割を果たす．$\boldsymbol{G}$ は方程式

$$\boldsymbol{G}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{G}^n \tag{9}$$

の非負最小解として与えられ，原理的には逐次代入によって計算することができる．また，レベル 0 の状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}_0$ は $\boldsymbol{G}$ の左固有ベクトルとして求まり，さらに定常状態確率ベクトルの母関数ベクトル $\boldsymbol{\pi}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\boldsymbol{\pi}_n$ は

$$\boldsymbol{\pi}(z)[z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(z)]=\boldsymbol{\pi}_0[z\boldsymbol{B}(z)-\boldsymbol{A}(z)]$$

から決定される[8]．Neuts [13] には，これらも含めて当時までに得られた M/G/1 型マルコフ連鎖に関する結果が網羅的に述べられている．さらに，MAP の登場によって重要性が増したこともあり，M/G/1 型マルコフ連鎖に関する研究はその後も適用範囲を広げ，あるいは精緻化されながら続けられている．

5. Aggregation 法

マルコフ連鎖を用いて待ち行列モデルを解析しようとしたとき，モデルが複雑になるにつれて解かなければならないマルコフ連鎖の状態数が急速に増大する[9]．これがマルコフ連鎖による数値解析の最大の欠点である．これを解消するために，マルコフ連鎖の状態をまとめて状態数を少なくすることが考えられる．

5.1 Aggregation 法の原理

状態空間 S 上の定常なマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ を考え，その推移確率行列を $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$, 定常状態確率ベクトルを $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)$ とする．S の分割を $\{S_1,\cdots,S_m\}$, $S_\mu\cap S_\nu=\phi$, $\mu\neq\nu$, $\cup_{\mu=1}^m S_\mu=S$, とし，

$$\beta_{\mu i}=\pi_i/\sum_{j\in S_\mu}\pi_j,\quad q_{\mu\nu}=\sum_{i\in S_\mu,j\in S_\nu}\beta_{\mu i}p_{ij} \tag{10}$$

とおく．すると行列 $\boldsymbol{Q}=(q_{\mu\nu})$ は

$$Y_n=\mu,\qquad \text{if } X_n\in S_\mu \tag{11}$$

によって定義される確率過程 $\{Y_n\}$ の推移確率行列となっている．$\{Y_n\}$ はマルコフ性を満たさずマルコフ連鎖にはならないが，定常過程でありその定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_\mu)$ は aggregated equation

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Q} \tag{12}$$

---

[8] $\boldsymbol{A}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\boldsymbol{A}_n$, $\boldsymbol{B}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\boldsymbol{B}_n$.

[9] 通常，マルコフ連鎖の状態数は無限大であるが，有限のところで打ち切ってもある精度で計算することができる．しかしモデルが複雑になると，精度を保つのに必要な状態数が増大してしまう．

を満たす．つまり $\{Y_n\}$ の定常状態確率は，あたかも $\{Y_n\}$ が推移確率行列 Q をもつマルコフ連鎖であるかのように考えて求めることができる．この $\{Y_n\}$ を（$\{X_n\}$ の分割 $\{S_1, \cdots, S_m\}$ に対する）aggregated chain と呼ぶ．

式 (10) の条件付き確率分布 $\boldsymbol{\beta}_\mu = (\beta_{\mu i})$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, が求まってしまえば，(12) を解いて $\boldsymbol{\alpha}$ をそして $\boldsymbol{\pi}$ を簡単に計算することができる．問題は，如何にして $\boldsymbol{\beta}_\mu$ を求めるか，ということである．

特殊な問題では，この $\boldsymbol{\beta}_\mu$ がうまく定まり，比較的簡単に定常状態確率が求められる [23, 24]．しかし，一般にはそう簡単には行かない．

5.2 Courtois の NDM

Courtois [3] は，このような分割の結果，Q の非対角項が対角項に比べて無視できるほど小さくなる場合 (NDM, nearly decomposable Markov chain) について考察した．このとき $\boldsymbol{\beta}_\mu$ は，対応する P の対角ブロックを推移確率行列と見なして，その定常分布から近似することができる．

5.3 Aggregation/Disaggregation 法

$\boldsymbol{\beta}_\mu$ を求めるのに別の aggregated chain を利用するのが，Aggregation/Disaggregation 法 (A/D 法) である．ここでは，各 μ に対して，S_μ の外の状態すべてをひとつの状態 $\{0_\mu\}$ にまとめた $S_\mu \cup \{0_\mu\}$ を状態空間とする aggregated chain を考える．このとき重みとして使う条件付き確率は，他の $\boldsymbol{\beta}_\nu$, $\nu \neq \mu$, と $\boldsymbol{\alpha}$ から求められる．この aggregated chain の定常状態確率から $\boldsymbol{\beta}_\mu$ が簡単に計算できる．この手続きを disaggregation という．$\boldsymbol{\alpha}$, $\{\boldsymbol{\beta}_\mu, \mu = 1, \ldots, m\}$ を変数として，ひとつの aggregation フェーズと m 個の disaggregation フェーズを組み合わせた反復法を構成すると，これらの変数が反復とともに真の値に収束していくことが期待される．これが A/D 法の原理である．

この方法を用いると，PH/PH/c など広い範囲の待ち行列モデルに対して比較的少ない計算量でその定常状態確率を計算することができる．とくに (1) の形の推移確率 (速度) 行列をもつ場合に効果的である．この反復法で，各変数ベクトルの値が収束すればそれが真の値に一致することは簡単に示せるが，この反復法自身の収束性はまだ証明されていない．

この数値計算法は，筆者が Lumping 法という名で提案したものであるが，元の論文は Research Report の形で公刊しただけで雑誌には投稿せず，[22] で引用しただけであった．このことがネーミングを含め後々までいろいろ波紋を投げかける原因となった．きちんと雑誌に発表しておくべきであったと反省している．

この A/D 法にはいくつかのバリエーションが考案されている [15]．Schweitzer [14] では，数学的基礎の解説と反復が必ず停止するための変更 (P^n が幾何的に収束することを利用する) がなされている．Seelen [16] は A/D 法が効率的なのは Aggregation フェーズであると主張して，Aggregation と加速法を利用して実際に多数の待ち行列モデルを数値解析している．また Sumita & Reiders [18] は，Disaggregation フェーズの計算を改良する方法を提案している．これはマルコフ連鎖に特定の構造がみられないときにはかなり有効である．この方法に関する研究はまだ進行中で，1995 年に米国の North Carolina で行われた国際会議でも，超並列計算機を利用する場合の方法論 [21] など，数編の論文が発表されている．

筆者らの経験によると，この A/D 法で解けるマルコフ連鎖の大きさ (状態数) は主としてメモリのサイズに制約され，通常のワークステーションなどを用いたときは状態数 10 万程度，超並列計算機などでは，計算機にもよるが，1000 万程度が限度のように思える．

5.4 Cross Aggregation 法

Aggregation 法の原理を使って待ち行列ネットワークを近似解析しよう，という試みも筆者の近辺で行われている．この cross aggregation 法には近似の精度に応じていくつかのレベルがあるが，そのうちレベル 2 と呼ばれているものの原理は次のようである [20]．

ネットワークの中で隣接するノードペアの集合を $N_2 = \{(k, h)\}$ とする．ペア $(k, h) \in N_2$ に対して，それらの状態だけを考慮し他のノードの状態を無視して aggregated chain を作る．するとその定常状態確率ベクトル $x_{kh} = (x_{kh}(i_k, i_h))$ は (12) と同様の aggregated equation を満たすが，そこにでてくる重み係数 $\beta_{(k,h),i}$ は 3 つの隣接した状態の同時定常状態確率，たとえば $x_{khr}(i_k, i_h, i_r)$ のようなもの，を含んでいる．これを

$$x_{khr}(i_k, i_h, i_r) \approx \frac{x_{kh}(i_k, i_h)\, x_{hr}(i_h, i_r)}{x_h(i_h)} \tag{13}$$

などのように近似すると，N_2 に含まれるノードペアにおける定常状態確率のみを変数とする反復法を構成することができる．

このcross aggregation法によってどの程度の近似精度が得られるかについて，最近，筆者のところの大学院生がかなりきちんとした数値実験を行った[25, 26]. ・/H_2/2/4というようなノードが50個ほどいろいろな形に繋がった非循環型の(循環するルートがない)ネットワークで試したところ，スループットは，通常，誤差1%以下，特に悪いものでも数%の誤差で近似することができた．誤差の生じる主たる原因はボトルネックノードが川上に向かって及ぼす影響で，この影響が大きいネットワークでは誤差も大きくなる傾向にある．

この方法はかなりの潜在的可能性を持っていると筆者は考えている．もう少し研究を続ければ，実用的な近似法として広く利用可能となると思われる．

参考文献

[1] Asumussen, S. and Koole, G. (1993) "Marked ponit processes as a limit of Markovian arrival streams," *J. Appl. Prob.*, **30**, 365–372.

[2] Asumussen, S. and Ramaswami, V. (1990) "Probabilistic interpretation of some duality results for the matrix paradigms in queueing theory," *Stoch. Models*, **6**, 715–733.

[3] Courtois, P.J. (1977) *Decomposability: Queues and Computer system Applications*, Academic Press, New York.

[4] Latouche, G. (1993) "Algorithms for infinite Markov chains with repeating columns," in Meyer, C.D. and Plemmons, R.J. (eds.), *Linear Algebra, Markov Chains and Queueing Models*, Springer Verlag, New York, 231–265.

[5] Latouche, G. and Ramaswami, V. (1993) "A logarithmic reduction algorithm for quasi–birth–and–death processes," *J. Appl. Prob.*, **30**, 650–674.

[6] Lucantoni, D.M., Meier–Hellstern, K.S. and Neuts, M.F. (1990) "A single–server queue with server vacations and non–renewal arrival processes," *Adv. Appl. Prob.*, **26**, 676–705.

[7] Lucantoni, D.M. (1991) "New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process," *Stoch. Models*, **7**, 1–46.

[8] Machihara, F. (1988) "Completion time of service unit interrupted by PH–renewal customers and its applications," *Proceedings of 12th International Teletraffic Congress*, North–Holland, Amsterdam, 1508–1514.

[9] Maier, R.S. and O'Cinneide, C.A. (1992) "A closure characterization of phase–type distributions," *J. Appl. Prob.*, **29**, 92–103.

[10] Neuts, M.F. (1975) "Probability distributions of phase type," in *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*, Department of Mathematics, University of Louvain, Belgium, 173–206.

[11] Neuts, M.F. (1979) "A versatile Markovian point process," *J. Appl. Prob*, **16**, 764–779.

[12] Neuts, M.F. (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[13] Neuts, M.F. (1989) *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel Dekker, New York.

[14] Schweitzer, J.P. (1984) "Aggregation methods for large Markov chains," in Iazeolla, G., Courtois, P.J. and Hordijk, A. (eds.) *Mathematical Computer Performance and Reliability*, North-Holland, Amsterdam, 275–286.

[15] Schweitzer, J.P. (1991) "A survey of aggregation–disaggregation in large Markov chains," in Stewart, W.J. (ed.) *Numerical Solution of Markov Chains*, Marcel Dekker, New York, Amsterdam, 63–88.

[16] Seelen, L.P. (1986) "An algorithm for Ph/Ph/c queues," *Euro. J. Opns. Res.*, **23**, 118–127.

[17] Sengupta, B. (1989) "Markov processes whose steady state distribution is matrix–exponential with an application to the GI/PH/1 queue," *Adv. Appl. Prob.*, **21**, 159–180.

[18] Sumita, U. and Rieders, M. (1990) "Application of the replacement process approach for computing the ergodic probability vector of large scale row-continuous Markov chains," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **33**, 279–307.

[19] Takahashi, Y., Machihara, F. and Takahashi, Y. (1996) "Correlated input queues arising out of high speed communication networks," *Proceedings of IFORS 1996*, TD11.1.

[20] Takahashi, Y. (1989) "Aggregate approximation for acyclic queueing networks with communication blocking," in Perros, H.G. and Altiok, T. (eds.) *Queueing Networks with Blocking*, North-Holland, Amsterdam, 33-46.

[21] Takahashi, Y. and Fujimoto, K. (1995) "Aggregation/disaggregation on a parallel computer," in W.J. Stewart (ed.) *Computations with Markov Chains*, Kluwer, Boston, 591–593.

[22] Takahashi, Y. and Takami, Y. (1976) "A numerical method for the steady-state probabilities of a GI/G/c queueing system in a general class," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **19**, 147–157.

[23] Tanaka, A. and Kino, I. (1998) "Lumpability in LRU stack with Markovian page references," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **41**, 91–117.

[24] Yamashita, H, Ohtani, H. and Suzuki, S. (1998) "An exact aggregation for inventory distribution in an automatic warehousing system," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **41** (to appear).

[25] 梅原 元 (1998) "大規模待ち行列ネットワークに対するCross Aggregation Methodの近似精度の検証," 修士論文、東京工業大学 数理・計算科学専攻.

[26] 平井 力 (1996) "Some Properties of the Cross Aggregation method for Approximately Analyzing Acyclic Queueing Networks," 修士論文，東京工業大学 数理・計算科学専攻.