講座

待ち行列研究の新しい潮流(2)
補助変数法と積形式解

高橋　敬隆*，紀　一誠**

1．はじめに

本稿はオペレーションズリサーチ（OR）・応用確率・通信・情報・数理・経営系の学部生・院生を対象として，中級レベルの待ち行列論をトピックス的に紹介する連載記事（毎回著者陣は異なる）の“皮切り”である．予備知識として，読者は高橋幸雄氏（東工大）の入門講座［7］やその参考文献に目を通されることを仮定する．

今回のテーマは補助変数法（supplementary variable method）と積形式解（product form solution）である．前者は系内客数過程のみではマルコフ（無記憶）にならない比較的複雑な待ち行列システムに対する常套手段であり，後者は待ち行列網の解析に不可欠のものである．また後述するが，第2種の積形式解を導出するには補助変数法が用いられる．

以下，単一ノード系を表記するのにKendall記号A/B/c/Kを用いる．Aは到着過程（Mはポアソン過程），Bはサービス時間分布を特徴づけ（Mは指数サービス時間分布），cはサーバ数を表し，Kは系の容量（系内許容人数）を表すものとする．K＝∞の時，/Kは省略する．

さて，“補助変数法”は，解析法としてCox以来の伝統があり一応，理論的な到達点に達しているが，初級編の待ち行列論の成書，教科書に記述されていないせいか，あまり人口に膾炙（かいしゃ）されていない．確かにポアソン入力一般サービス時間分布単一サーバ有限容量（M/G/1/K）系を見るとサービス終了時点に着目した“隠れマルコフ法”と“補助変数法”では得られる結果は同一であり手法的には大差がない．今まで，“隠れマルコフ法”は解析的に取り扱いやすい離散状態空間をもっているマルコフ連鎖であり，これで十分と思われてきたように思われる．しかし，例えば，WBAS（Whole Batch Acceptance Strategy）の下での集団ポアソン入力有限容量（M^X/G/1/K）系を考えると，隠れマルコフ法では解析が大変なのに対して，補助変数法ではPBAS（Partial Batch Acceptance Strategy）とほぼ同様に簡単に解析が進む．前者がある区間（サービス終了時点間隔）の状態の推移を追うのに対し，後者が微小区間（$t, t+\triangle t$）の状態の推移を考えればよいからである．

節2，節3では，M/G/1待時系，ならびにM/G/c/c即時系を対象とする．補助変数法を丁寧に紹介しながら，系内客数分布の定常解を得る．節3では残余サービスを補助変数とした補助変数法により，積形式解が得られる．節4では，コンピュータシステムの性能解析法［5］として必須な“待ち行列網”を取り上げ，待ち行列網を解くために必要な積形式解とその周辺の概念を紹介する．

2．M/G/1系

到着はポアソン過程に従い，一般サービス時間をもつ単一サーバを考える．待ち室容量は無限とする．到着率をλ，サービス時間分布（$H(x)$）のルベーグ・スティルチェス測度を$dH(x)$とする．$H(x)$が確率密度関数(pdf) $h(x)$をもつならば$dH(x)=h(x)dx$．ラプラス・スティルチェス変換(LST)を$H^*(s)$とおく，$H^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}dH(t)$．任意時刻$t$における系内客数を$L(t)$，サービス中の客の残余サービス時間を$H^+(t)$とし，

$$\Pi_j(t, x)dx = Pr\{L(t)=j, x \leqq H^+(t) < x+dx\}, j \geqq 1 \tag{1}$$

$$\Pi_0(t) \equiv P_r\{L(t)=0\} \tag{2}$$

とおく．微小区間$\triangle t$中の系の状態変化に着目すると，

$$\Pi_j(t+\triangle t, x-\triangle t)dx = (1-\lambda\triangle t)\Pi_j(t, x)dx + \lambda\triangle t\Pi_{j-1}(t, x)dx + \Pi_{j+1}(t, 0)\triangle t dH(x) + o(\triangle t), \quad j \geqq 2 \tag{3}$$

*たかはし　よしたか　NTTマルチメディアネットワーク研究所
〒180-8585 武蔵野市緑町3-9-11
**きの　いっせい　NEC C&C メディア研究所
〒216-8555 川崎市宮前区宮崎4-1-1

$$\Pi_1(t+\triangle t, x-\triangle t)dx=(1-\lambda\triangle t)\Pi_1(t,x)dx$$
$$+\lambda\triangle t\Pi_0(t)dH(x)+\Pi_2(t,0)\triangle t dH(x)+o(\triangle t) \quad (4)$$
$$\Pi_0(t+\triangle t)=(1-\lambda\triangle t)\Pi_0(t)+\Pi_1(t,0)\triangle t+o(\triangle t) \quad (5)$$

が成り立つ，式(3)，(4)の右辺第3項は$\triangle t$中に客が退去し，次にサービスに入った客に対するサービス時間が［$x, x+dx$）の間にある確率を意味する．同様に，式(4)の右辺第2項は$\triangle t$中に生起して空きサーバに入った客のサービス時間が（$x, x+dx$）の間にある確率を意味する．

$$\Pi_j(t+\triangle t, x-\triangle t)-\Pi_j(t,x)=\Pi_j(t+\triangle t, x-\triangle t)$$
$$-\Pi_j(t,x-\triangle t)+\Pi_j(t,x-\triangle t)-\Pi_j(t,x) \quad (6)$$

なる恒等式を用いて変形した後，$\triangle t\to 0$とすれば，式(3)，(4)，(5)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\Pi_j(t,x)=-\lambda\Pi_j(t,x)+\lambda\Pi_{j-1}(t,x)$$
$$+\Pi_{j+1}(t,0)dH(x)/dx, j\geqq 1 \quad (7)$$

ここで，$dH(x)/dx$はサービス時間分布のルベーグ測度に関するラドン・ニコディム導関数である．特にpdfが存在する時は$dH(x)/dx=h(x)$．式(7)で$H_0(t,x)dx=\Pi_0(t)H(dx)$と約束する．

$$d\Pi_0(t)/dt=-\lambda\Pi_0(t)+\Pi_1(t,0) \quad (8)$$

平衡状態の存在を仮定して，

$$\Pi_j(x)\equiv\lim_{t\to\infty}\Pi_j(t,x),\ j\geqq 1 \quad (9)$$
$$\Pi_0\equiv\lim_{t\to\infty}\Pi_0(t) \quad (10)$$

とすると，式(7)，(8)より，時刻tに関する導関数を0とおいて，次式を得る

$$-d\Pi_j(x)/dx=-\lambda\Pi_j(x)+\lambda\Pi_{j-1}(x)$$
$$+\Pi_{j+1}(0)dH(x)/dx,\ j\geqq 1 \quad (11)$$
$$\lambda\Pi_0=\Pi_1(0) \quad (12)$$

式(11)，(12)を解くため，$\Pi_j(x)$のz変換を$\Pi(z,x)$，そのラプラス変換を$\Pi^*(z,s)$とする．すなわち，

$$\Pi(z,x)\equiv\sum_{j=1}^{\infty}z^j\Pi_j(x)$$
$$\Pi^*(z,s)\equiv\sum_{j=1}^{\infty}z^j\int_0^{\infty}e^{-sx}\Pi_j(x)dx$$

式(11)は，以下に変換される

$$(s-\lambda+\lambda z)\Pi^*(z,s)+H^*(s)z^{-1}\Pi(z,0)$$
$$-(1-z)\lambda\Pi_0 H^*(s)=\Pi(z,0) \quad (13)$$

上式で$s=\lambda(1-z)$とおけば

$$\Pi(z,s)=\frac{\lambda z(1-z)H^*(\lambda-\lambda z)}{H^*(\lambda-\lambda z)-z}\Pi_0 \quad (14)$$

式(14)を式(13)に代入すると

$$\Pi^*(z,s)=\frac{\lambda z(1-z)}{z-H^*(\lambda-\lambda z)}\,\frac{H^*(s)-H^*(\lambda-\lambda z)}{s-\lambda+\lambda z}\Pi_0 \quad (15)$$

したがって，定常分布

$$\Pi_j\equiv\lim_{t\to\infty}P_r[L(t)=j]$$
$$=\int_0^{\infty}\Pi_j(x)dx,\ j\geqq 1$$

のz変換は$\Pi^*(z,0)$となる．正規化条件

$$\Pi^*(1,0)+\Pi_0=1 \quad (16)$$

より，式(15)から，

$$\Pi_0=1-\rho \quad (17)$$

故に，任意時点における系内客数の定常分布$\{\Pi_j\}$の母関数$\Pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\Pi_j$は次式のように解けたことになる．

$$\Pi(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)H^*(\lambda-\lambda z)}{H^*(\lambda-\lambda z)-z} \quad (18)$$

式(18)はポラチェック・ヒンチン（Pollaczek-Khintchine）の公式と呼ばれ，通信システムや情報システムの性能評価に不可欠のものである．zに関して微分して1を代入すれば，系内客数のモーメントに関する情報が分かる．

ここでの定式化は，有限容量（M/G/1/K）系の時にも成り立つ．ただし有限ということで，z-変換を取らずに，有限の方程式系から定常分布に関する漸化式を得るのである．一般に，有限容量モデルに対する系内客数分布を陽に求めることは困難であるが，ポアソン入力時には，最近になって陽解が得られた［1］．コンピュータを使えば式(11)のような漸化式があれば充分である．その意味ではM/G/1/Kは数値的に解けることは容易に分かる．

IP-over-ATM（Internet Protocol over Asynchronous Transfer Mode）ネットワークにおけるSVCC（Switched Virtual Channel Connections）性能評価には，サーバ遊休／準備時間のあるM/G/1/K系が重要となるが，この場合にもここでの議論が適用される．詳細はSakai, et al[3]を参照されたい．また，バーストトラヒックを表現するMMPP（Markov-Modulated Poisson Process）やMAP（Markov Arrival Process）にも拡張可能である［4］．

3．M/G/c/c系

入力過程は前節同様，到着率λのポアソン過程とし，一般サービス時間分布$H(x)$をもつサーバがc個並列に置かれ，各々独立にサービスされるものとする．到着客がc個サーバがすべて稼働中であることを見い出す時，その客は呼損となり，系外に去るものとする．

この系はいわゆる即時系（loss system）と呼ばれ，通信システムでは古くは電話網から最近のATM網（呼レベル制御）に至るまで，トラヒック設計・制御・管理に不可欠のものである．

初等待ち行列コースではサービス時間が指数・位相型分布に従うと仮定し，出生死滅過程や離散状態マルコフ過程(位相法)により，M/M/c/c（あるいはM/PH/c/c）系が解析される．本稿では，中級待ち行列コースということで，サービス時間が一般分布に従う場合を取り扱う．

任意時刻tにおける系内客数を$L(t)(=0,1,2,\dots,c)$とする．前節と同様の記号・定式化を用いるが，今度は複数サーバ系を取り扱うため，系内客数分の残余サービス時間が必要である．平衡状態の存在を仮定して，

$$\Pi_j(x_1,\dots,x_j)dx_1\dots dx_j \equiv \lim_{t\to\infty} P_r[L(t)=j, x_1 \leqq H_1^+(t) < x_1+dx_1,\dots,x_j \leqq H_j^+(t) < x_j+dx_j] \ (1\leqq j\leqq c) \tag{19}$$

$$\Pi_0 \equiv \lim_{t\to\infty} P_r[L(t)=0] \tag{20}$$

を導入する．解析の必要上，「客は空きサーバをランダムに選択する」という仮定を設ける．この仮定により，$\Pi_j(x_1,\dots,x_j)$は変数$x_1,\dots,x_j$の対称関数となる．j個のサーバが稼働中（busy）である状態を$(b_1,b_2,\dots,b_j)$で表した時，新たに生起した客oは$(j+1)$種類の位置；$(o,b_1,b_2,\dots,b_j),(b_1,o,b_2,\dots,b_j),\dots,(b_1,b_2,\dots,b_j,o)$に等確率（ランダム）で配置される．

M/G/1系と同様，微小区間$\triangle t$中の状態変化に着目すると

$$\begin{aligned}&\Pi_j(x_1-\triangle t,\dots,x_j-\triangle t)dx_1\dots dx_j\\ &=[1-\lambda(1-\delta_{jc})\triangle t]\Pi_j(x_1,\dots,x_j)dx_1\dots dx_j\\ &+(1-\delta_{jc})(j+1)\Pi_{j+1}(x_1,\dots,x_j,0)dx_1\dots dx_j\triangle t\\ &+\lambda\triangle t\frac{1}{j}\Pi_{j-1}(x_1,\dots,x_{j-1})dx_1\dots dx_{j-1}dH(x_j)\\ &+o(\triangle t) \ (1\leqq j\leqq c)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\Pi_1(0)=\lambda\Pi_0 \tag{22}$$

ここでδ_{jc}はKroneckerのデルタである．式(21)の右辺第3項は，空きサーバ選択がランダムである仮定から，新たに生起した客がj個の可能な配置のうちの1つを等確率$\frac{1}{j}$で選択していることを表す．

さらに，$\triangle t$中に新しい客が生起して，空きサーバを選択する事象を考えると，

$$\begin{aligned}&\Pi_{j+1}(x_1-\triangle t,\dots,x_j-\triangle t,\triangle t)dx_1\dots dx_j\triangle t\\ &=\frac{\lambda\triangle t}{j+1}\Pi_j(x_1,\dots,x_j)dx_1\dots dx_j+o(\triangle t)\end{aligned} \tag{23}$$

上式の右辺第1項は式(21)の右辺第3項同様に考えて得られる．

式(21)－(23)の両辺を$dx_1\dots dx_j$で割り，$\triangle t\to 0$とすれば

$$\begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Pi_j(x_1,\dots,x_j)=-\lambda(1-\delta_{j,c})\Pi_j(x_1,\dots,x_j)\\ &+\lambda\frac{1}{j}\Pi_{j-1}(x_1,\dots,x_j)\frac{dH(x_j)}{dx_j}\\ &+(1-\delta_{j,c})(j+1)\Pi_{j+1}(x_1,\dots,x_j,0) \ (1\leqq j\leqq c)\end{aligned} \tag{24}$$

$$(j+1)\Pi_j(x_1,\dots,x_j,0)=\lambda\Pi_j(x_1,\dots,x_j) \ (1\leqq j\leqq c) \tag{25}$$

$$\Pi_1(0)=\lambda\Pi_0 \tag{26}$$

ただし引数が，空集合の時$\Pi_0(\phi)\equiv\Pi_0$と約束する．

式(24)－(26)を解析的に解くわけであるが，ここで，関数$\Pi_j(x_1,\dots,x_j)$の対称性に着目し，

$$\Pi_j(x_1,\dots,x_j)=C_j\varphi(x_1)\dots\varphi(x_j) \ (1\leqq j\leqq c) \tag{27}$$

なる積形式（変数分離法）を試みる（解を予想する）．連立微分方程式系(24)－(26)の解はマルコフ過程の定常分布ゆえ，一意的である．したがって，もし解くのに都合の良い式(27)が方程式系(24)－(26)を満たすことを確認すれば，それは本当の解（積形式解）である．一般性を失うことなく$\varphi(0)=1$とおくことができる．

式(27)を式(25)－(26)に代入すれば，

$$C_1=\lambda\Pi_0 \tag{28}$$

$$(j+1)C_{j+1}=\lambda C_j \ (1\leqq j\leqq c) \tag{29}$$

式(28)－(29)を逐次解くと，

$$C_j=\frac{\lambda^j}{j!}\Pi_0 \ (1\leqq j\leqq c) \tag{30}$$

再び，式(27)，(30)を式(24)に代入して$j=1$の場合を考えると

$$-\frac{d}{dx_1}\varphi(x_1)=\frac{dH(x_1)}{dx_1} \tag{31}$$

初期値$\varphi(0)=1$より，式(31)を解いて，

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=H^c(x)\\ &\equiv 1-H(x)\end{aligned} \tag{32}$$

再び，式(27)，(30)，(32)より

$$\Pi_j(x_1,\dots,x_j)=\frac{\lambda^j}{j!}\Pi_0\prod_{i=1}^{j}[1-H(x_i)] \ (1\leqq i\leqq c) \tag{33}$$

式(33)は実際（$j\geqq 2$の場合も）式(24)－(25)の解であることが確かめられる．したがって我々は所要の解の形を得た．残された仕事はΠ_0を求めることである．

さて，定義により任意時点における定常系内客数分布$\{\Pi_j\}$は次式となることに注意しよう．

$$\begin{aligned}\Pi_j&=\int_0^\infty\dots\int_0^\infty\Pi_j(x_1\dots x_j)dx_1\dots dx_j\\ &=\frac{\rho^j}{j!}\Pi_0 \ (1\leqq j\leqq c)\end{aligned} \tag{34}$$

ここで$\rho\equiv\lambda h$

$$\equiv\lambda\int_0^\infty[1-H(x)]dx$$

正規化条件$\left(\sum_{j=0}^{c}\Pi_j=1\right)$より

$$\Pi_0=\left(\sum_{j=0}^{c}\frac{\rho^j}{j!}\right)^{-1} \tag{35}$$

式(33)，(35)により定常解が得られた．特に定常系内客数分布は式(34)，(35)で与えられる．

定常解(33)，(35)はいわゆる積形式(product form)を成しており，系内客数分布$\{\Pi_j\}$がサービス時間分布に（平均を除いて）依存しないことを示している．このように平均値にのみしか依存せず，それ以外の分布形の情報に依存しないとき，ロバストネス（robustness）がある，あるいは，不感性（insensitivity）を持つという．すなわち，M/G/c/c即時系の定常分布（特に呼損率Π_c）はサービス時間分布に対して不感性を持っている．

Erlang (1917) は，M/M/c/c即時系の定常分布が，M/D/c/c即時系についても成り立つということを不完全に証明し，一般サービス時間分布でも成り立つかという問題を提起した．この問題に対し，数学的に厳密に証明を与えたのがSevastyanov (1957) だが，定式化としては，経過サービス時間（elapsed service time）を補助変数とした補助変数法を用いている．藤木，雁部［8］には経過サービス時間を補助変数とした積分微分方程式が記述されているが，本稿では，残余サービス時間（remaining service time）を補助変数とした微分方程式のみのアプローチを紹介した．補助変数として経過（elapsed）をとるか，残余(remaining)をとるか好みの問題とされているようだが，後者には面倒な境界条件が不要で，積分微分方程式ではなく微分方程式のみで解析が行われるため，利点が多いように筆者らは思う．これまでM/G/c/c即時系に対し，後者の（残余サービス時間を補助変数とする）アプローチが見られなかったのは不思議である．

現実の通信システムには，この他，集団到着や留保(server reservation）をしていることがある．この時に定常解を求めることが，実用的な課題として残されている．

4．待ち行列網

待ち行列モデルが「解けた」ということを，定常状態の分布が陽な形で得られたものと解釈するなら，「解けている」待ち行列網モデルとしてよく知られているものは「積形式解」をもつモデルであろう．一般に積形式解といわれているものは2種類あり，それぞれは密接な関係をもつが意味するものは別である．はじめに，この2種類の積形式解を紹介する．

第1種の積形式解：単一サーバのNノードからなるジャクソン型待ち行列網の定常状態分布は，ノードiの客数がx_iである周辺確率$\pi_i(x_i)$の積の形，すなわち

$$\pi(x_1,x_2,\dots,x_N)=C\pi_1(x_1)\pi_2(x_2)\dots\pi_N(x_N) \tag{36}$$

に与えられる．Cは正規化定数とする．また，$1/\mu_i$をノードiでの平均サービス要求時間，θ_iをトラヒック方程式を解いて得られる平均訪問回数，トラヒック密度$\rho_i=\theta_i/\mu_i$とすると，

$$\pi_i(x_i)=\rho_i^{x_i} \quad i=1,2,\dots,N. \tag{37}$$

第2種の積形式解：K種のクラスがあるM/G/1モデルを考える．クラスkの客は到着率λ_kのポアソン過程で到着し，サービス要求時間S_kは平均値$1/\mu_k$をもち，分布関数$F_k(t)=P(S_k\le t)$（確率密度関数f_k）に従う．サービス率は滞在客数に依存しないとする．この時，サービス規律が対称型待ち行列（後述）となる条件を満たすなら，この待ち行列モデルの定常状態分布は，

$$\pi(\boldsymbol{c},\boldsymbol{y})=q(\boldsymbol{c})\prod_{l=1}^{n}\mu_{c_l}\{1-F_{c_l}(y_l)\}, \tag{38}$$

$$q(\boldsymbol{c})=C\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda_{c_l}}{\mu_{c_l}} \tag{39}$$

と表される．Cは正規化定数，c_l，y_lをそれぞれ待ち行列のl番めの位置に滞在する客のクラス番号と残余サービス時間，$\boldsymbol{c}=(c_l)_{l=1}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_l)_{l=1}^n$とする．

積形式解の意味するもの：積形式解(36)は，各ノードの滞在客数が互いに独立であることを示している．また(37)は，正規化定数の相異を除けば，各ノードの周辺確率がM/M/1と同じになることを示している．網内の各ノードへの到着過程は独立なポアソン過程にはならないにも拘わらず，これらの積形式解が成り立つことは興味深い．積形式解(38)は，滞在客の残余サービス時間は互いに独立であることを意味している．このように定常分布$q(\boldsymbol{c})$がサービス時間分布の平均値のみに依存し，それ以外の性質には影響されない性質をもつ時，この待ち行列は不感性（insensitivity）をもつという．

方程式を解く：複雑な待ち行列について，積形式解(36)，(38)のような美しい形の解がどのようにして得られたのであろうか．その方法の特徴的な部分は，方程式を「解く」部分にある．複雑な待ち行列網モデルの場合には，方程式をたてることはできてもその解を通常の方法で解くことは一般に困難であるため，方程式を直接解くことをあきらめ，解の形を予想するとい

う方法を採る．定常マルコフ過程の状態間推移を表現する方程式は大域平衡（global balance）方程式といわれ，状態空間をS，状態xから状態x'への推移率を$q(x, x')$とすると，

$$\pi(x)\sum_{x\in S}q(x, x')=\sum_{x'\in S}\pi(x')q(x', x),\ x\in S \tag{40}$$

という形をとり，状態xから流れ出る「確率流」と状態xに流入する「確率流」が平衡する条件を表現している．大域平衡方程式(40)は線形方程式であるから，解が存在するならばその解は一意である．したがって，積形式解を証明する論法は，まず何らかの方法により方程式(40)の解を予測し，その予測解を(40)に代入してみて矛盾のないことを確かめる，ということになる．すなわち，積形式解は方程式を「解いて」得られるのではなく，「発見して」得られるものである．それでは，複雑な形をした方程式(40)からどのようにして解の形を予測するのであろうか．解の予測を助けるとともに，それ自体が待ち行列の解析に深い洞察を与えるいくつかの確率過程と，それに関連する平衡方程式が研究されている．

可逆過程と局所平衡方程式：状態空間Sをもつ定常マルコフ過程$X(t)$について，時間を逆転させた確率過程$X(-t)$を逆過程（reversed process）という．$X(t)$および$X(-t)$の状態推移率をそれぞれ$q(x, x')$，$q'(x, x')$とする．このとき，$X(-t)$は$X(t)$の定常分布$\pi(x)$と同じ定常分布をもつ定常マルコフ過程となり，$x, x'\in S$について以下の関係が成り立つ．

$$\pi(x)q'(x, x')=\pi(x')q(x', x). \tag{41}$$

$X(t)$が逆過程$X(-t)$と確率過程として同じ性質（有限次元の同時分布が同一）をもつとき，$X(t)$は可逆であるという．$X(t)$が可逆であるための必要十分条件は，$\sum_{x\in S}\pi(x)=1$となる正数$\pi(x), x\in S$が存在し，

$$\pi(x)q(x, x')=\pi(x')q(x', x)\quad x, x'\in S \tag{42}$$

を満たすことである．ここで，(41)式の左辺に現れる$q'(x, x')$が(42)式の左辺では$q(x, x')$に置き換わっていることに注意．この時，$\pi(x)$は$X(t)$の定常分布になる．方程式(42)は局所平衡（detailed balance）方程式といわれる．局所平衡方程式を満たす解は自動的に大域平衡方程式をも満たす．定常M/M/1待ち行列長過程は可逆過程の一例である．

準可逆過程と部分平衡方程式：サービス要求時間が一般分布に従うKクラスの客が存在する一つの待ち行列を考える．この待ち行列の時刻t_0における状態$x(t_0)$が各クラスcについて，

- 時刻t_0以降に到着するクラスcの客の到着時点列
- 時刻t_0以前に退去したクラスcの客の退去時点列

に独立な定常マルコフ過程になる時，この待ち行列は「準可逆（quasi-reversible）」であるといわれる．ある待ち行列が準可逆なら，クラスcの客の到着時点列は独立なポアソン過程となり，またクラスcの客の退去時点列も独立なポアソン過程となる．ただし，この逆は成り立たないので注意が必要である．準可逆な待ち行列の状態xに対して，この状態よりもクラスcの客が1人だけ多く，その他のクラスの客に関する状態は変わらない状態をすべて集めてできる状態集合を$S(c, x)$とする．この時，準可逆性より，クラスcの客の到着過程はそのクラスcのみに依存し状態xには依存せず，到着率は

$$\alpha(c)=\sum_{x'\in S(c,x)}q(x, x') \tag{43}$$

となる．一方，この待ち行列の逆過程もまた準可逆な待ち行列に対応することから，逆過程におけるクラスcの客の到着率もまた状態$x(t_0)$とは独立になる．逆過程の到着過程は順過程の退去過程であり，定常性から退去率と到着率は等しいことを用いると，逆過程の推移率$q'(x, x)$を用いて$\alpha(c)$はまた

$$\alpha(c)=\sum_{x'\in S(c,x)}q'(x, x') \tag{44}$$

と表すことができる．(43)と(44)のそれぞれの右辺を等しいとし，順過程と逆過程の間を結ぶ関係式(41)を用いることにより次の関係を得る．

$$\pi(x)\sum_{x'\in S(c,x)}q(x, x')=\sum_{x'\in S(c,x)}\pi(x')q'(x', x) \tag{45}$$

方程式(45)は部分平衡（partial balance）方程式といわれる．部分平衡方程式は大域平衡方程式(40)とよく似た形をしている．相異は流入と流出を平衡させる状態の範囲のみであり，このことから直ちに，部分平衡方程式を満たす解は大域平衡方程式の解となっていることがわかる．また，局所平衡方程式を満たす解は部分平衡方程式の解になっていることも明らかであろう．部分平衡方程式(45)の左辺は，状態xの時にクラスcの客が到着することによりその状態を離れる率と，ある状態x'からクラスcの客が退去することにより状態xに移行する率が等しいことを表している．このことが部分平衡方程式をつくる際の示唆を与える．

準可逆なら待ち行列は，第2種の積形式解をもつ．準可逆な待ち行列から構成される待ち行列網を，準可逆な待ち行列網という．準可逆な待ち行列網は定常状

態分布に第1種の積形式解をもつ．また，準可逆な待ち行列網の逆過程はやはり準可逆な別の待ち行列網に対応している．各種過程と方程式の関係をまとめると次のようになる．

$$\begin{matrix}\text{可逆過程}\\ \text{(局所平衡)}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{準可逆過程}\\ \text{(部分平衡)}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{定常マルコフ過程}\\ \text{(大域平衡)}\end{matrix}$$

ステーションバランスとローカルバランス：どのような規律をもつ待ち行列が準可逆な待ち行列になるのであろうか．必要十分条件は明らかではないが，十分条件として，ステーションバランス（station balance）条件およびローカルバランス（local balance）条件を満たす待ち行列等が知られている．ステーションバランス条件を満たす待ち行列は，対称型待ち行列（symmetric queue）といわれる．状態$\boldsymbol{c}$の時，待ち行列中の位置lに滞在する客にサービス能力の$\beta(l, \boldsymbol{c})$をふりむけ，またこの状態に出会う到着客は$\delta(l, \boldsymbol{c})$で位置$l$を選択する規律を考える．ここで，$\sum_{l=1}^{n}\beta(l, \boldsymbol{c})=1, \sum_{l=1}^{n+1}\delta(l, \boldsymbol{c})=1$とし，客の到着や退去による位置番号の付け替えは順送りとする．βやδの選び方でさまざまな規律が表現できる．積形式解の証明は補助変数法あるいはその表現を変えたGSMP（Generalized Semi-Markov Process）を用いるが，その際$\boldsymbol{c}_{[l]}=(c_1, \ldots, c_{l-1}, c_{l+1}, \ldots, c_n)$とし，

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{f_{cl}(y_{cl})}{1-F_{cl}(y_{cl})}\{\beta(l, \boldsymbol{c})-\delta(l, \boldsymbol{c}_{[l]})\}=0 \tag{46}$$

が成り立てば積形式解が成り立つ．(46)は明らかに，$\beta(l, \boldsymbol{c})=\delta(l, \boldsymbol{c}_{[l]})$の場合には成立．この条件をステーションバランス（station balance）条件という．一方，(46)はすべてのクラスのサービス要求時間が指数分布（平均値は異なっていてよい）に従い，$\sum_{l=1}^{n}\mu_{cl}\{\beta(l, \boldsymbol{c})-\delta(l, \boldsymbol{c}_{[l]})\}=0$を満たす場合にも成立．この条件をローカルバランス条件という．先着順（FIFO）規律をもつ待ち行列は，対称型待ち行列ではないが，ローカルバランス条件を満たし積形式解をもつこともある．

参考文献

[1] A. Frey and Y. Takahashi："An explicit solution for M/G/1/K queue with vacation time and enhanstive service discipline", J. Oper. Res. Soc. Japan (JORSJ), Vol.41 No.3 (to appear).

[2] M. F. Neuts："Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models", Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore (1981).

[3] Y. Sakai, Yo. Takahashi, Yut. Takahashi, and T. Hasegawa："A composite queue with vacation/set-up/close-down times for SVCC in IP over ATM networks", JORSJ, vol.41, No.1, pp.68-80 (1998).

[4] T. Tsuchiya and Y. Takahashi："On discrete-time single-server queues with Markov modulated with Bernoulli input and finite capacity", JORSJ, vol.36, No.1, pp.29-45 (1993).

[5] 紀 一誠："情報処理システムの性能評価(1)/(2)/(3)", オペレーションズリサーチ. vol.40, pp.315-320／370-375／431-436 (1995).

[6] 高橋幸雄："状態方程式を解く", オペレーションズリサーチ, vol.26, pp.190-196 (1981).

[7] 高橋幸雄："やさしい待ち行列(1)/(2)/(3)/(4)", オペレーションズリサーチ, vol.40-41, pp.649-654/pp.716-721/pp.35-40/pp.100-107 (1995-1996).

[8] 藤木正也・雁部頴一："通信トラヒック理論", 丸善 (1983).