待ち行列ネットワークと積形式解

宮沢 政清

1．今なぜ積形式なのか

待ち行列ネットワークに多少とも関心を持ったことのある読者は，本稿の表題に疑問をもたれる方も多いと思う．後に詳しく述べるが，**積形式**（product form）とは結合分布が周辺分布の積となることである，またそのような定常分布を持つ待ち行列ネットワークを**積形式ネットワーク**と呼ぶ．Jacksonが積形式ネットワークの論文を発表したのが1957年，これを拡張し現在標準モデルとしてよく使われるBCMP（Baskett et al.[1]の略）やKellyによる積形式ネットワークの発表が1970年代である．積形式はネットワークの解析を単一のシステムのレベルまで簡略化するため応用上使いやすく，近似計算などにも広く利用されてきた．しかし，1980年代以降，理論的発展は止まってしまったかの様に見える．私自身も6，7年前までは積形式ネットワークに新しい展開があるとは考えてもいなかった．むしろもっと別の方向である離散時間型ネットワーク（後述する）に興味を持っていた．

そもそも，私はネットワークの専門家ではなかったし，後述する**準可逆性**（quasi-reversibility）が初めよく理解できなかった．しかし，少しずつ慣れ親しんでくると，BCMPやKellyのモデル化は細かな仕様にこだわりすぎて，全体を見ていないことに疑問を感じてきた．たぶん「単一の待ち行列モデルでも解析的に解けるモデルは限られているので，一般的なネットワークモデルを考えることは無理である」という認識が強かったのであろう．でも初めから問題を小さくする必要はないのではないか？　例えば，なぜ積形式を持つかを検討するためには，積形式を持たないモデルを含む一般的なネットワークを考える必要がある．こんな気持ちから始まった研究だが，たまたま，新しいタイプの積形式ネットワークの出現とぶつかり，積形式ネットワークの新しい展開を見ることができた．このホットな話題を紹介したい．

2．待ち行列ネットワークモデル

初めに，待ち行列ネットワークの概要と研究目的について簡単に説明する．待ち行列ネットワークとは，複数のサービスシステムをネットワークとして結合したシステムのことである．客は結合している経路に従い，場合によっては，確率的に経路を選択し，順次サービスを受ける．客がサービスを受ける個々のシステムを**ノード**と呼ぶ．例えば，ノードを直列につないだ場合には，直列型といい，外部から到着した客は，到着したノードから順次サービスを受け退去する．一般に，外部から客が到着する待ち行列ネットワークを**開放型**と呼ぶ．また，外部からの到着がなく一定の人数の客が常にいるモデルを**閉鎖型**と呼ぶ

このような待ち行列ネットワークは，計算機システム，通信ネットワーク，生産システムなどの設計や運用のための性能評価モデルとして広く使われてきた．あらゆるものがネットワーク化されつつある今日では，待ち行列ネットワークの潜在的需要も大きい．通常，これらのモデルの解析や分析はシミュレーションによることが多いが，モデルの一般的特性を調べるためには理論的なモデルの解析が重要である．理論的研究の課題として以下のものが挙げられる．

- システムを長時間稼働したときの安定性，特に定常分布の存在条件や定常状態への収束の速さ．
- 魅力ある解析可能なモデルを見つけ，定常分布等の解析手法や数値計算法を与える．
- システムの最適な制御方法．

積形式ネットワークの研究は2番目の定常分布の解析法の1つである．ネットワークのように複雑なシステムでは，応用上魅力あるモデルを見つけることは特に重要である．なお，本稿では，流体などの近似モデ

みやざわ　まさきよ　東京理科大学 理工学部 情報科学科
〒278-0022 千葉県野田市山崎2641

ルは考えず，直接的なモデルを対象とする．

先に触れたが，待ち行列ネットワークの難しさは，ネットワークを構成する単一システムでも限られた場合にしか理論的解析ができないことにある．解析が簡単な例に，客の到着がポアソン過程に従い，サービス時間が互いに独立で同一の指数分布に従う場合がある．これをM/M-型モデルと呼ぶ．この型の待ち行列には，単一窓口の$M/M/1$や複数窓口の$M/M/s$などがある．これらのモデルの拡張が試みられてきたが，到着間隔の分布またはサービス時間の分布の一方を一般の分布とする場合を除いて定常分布を解析的に求めることは困難である．ただし，数値計算的な面からは，Neuts [17]による行列幾何表現があり，広い範囲の分布に対して，アルゴリズム的な解析が可能である．ただし，これも待ち行列が1つである場合にしか適用できない．

したがって，一般的なネットワークモデルの解析には多くを望めないと考えるのが自然である．しかし，システムが複雑になったことから，単一システムとは別の角度からの研究が進められつつある．これは積形式などの定常分布の解析だけではない．例えば，本稿では論じないが，客の到着やシステムの変化を流体で近似する流体近似モデルを利用して，システムの安定性に対する必要十分条件を調べる研究が大きく注目されている（[6]等参照）．

3．積形式と線形トラヒックモデル

待ち行列ネットワークの定常分布の解析は，初めに述べたように，Jackson[12]による研究が端緒となった．彼は，開放型ネットワークにおいて，外部から客が各ノードにポアソン到着し，単一または複数の窓口で指数分布サービスを受け，サービス完了後は次のノードを確率的に選択し，最終的には退去すると仮定した．この経路選択の確率はネットワークの状態とは独立であるとし，ノードjから退去しノードkへ到着するときr_{jk}と表す．これらの確率を行列のように並べた$\{r_{jk}\}$を経路選択行列(routing matrix)と呼ぶ．このモデルは，今日，Jackson ネットワーク と呼ばれている．N個のノードを持つ Jackson ネットワークでは，ノードjでの待ち人数n_jを要素とするベクトル

$$\boldsymbol{n}=(n_1, n_2, \dots, n_N)$$

をネットワークの状態に取ると，連続時間型のマルコフ連鎖（状態が可算個のマルコフ過程）となる．このマルコフ連鎖の定常分布πはノードごとの定常分布π_jの積となる．すなわち，

$$\pi(\boldsymbol{n})=\pi_1(n_1)\times\pi_2(n_2)\times\cdots\times\pi_N(n_N)$$

であり，各ノードの待ち人数は互いに独立である．

このように，結合分布が周辺分布の積となるとき，**積形式**と呼ぶ．積形式は，待ち行列ネットワークの解析がノードごとの解析に置き換えられることを意味しており，定常分布を求めるうえで問題が格段に易しくなる．特に，Jackson ネットワークでは，各ノードの待ち人数分布は，そのノードへ仮想的に平均到着率が一致するポアソン到着を仮定したときの定常分布に等しい．したがって，ネットワーク状態の定常分布は平均到着率を求める問題とM/M-型入力を持つ待ち行列の定常分布を求める問題に帰着する．ノードjへの平均到着率をα_jとすると，α_jは平均退去率に等しく，**トラヒック方程式**（traffic equation）

$$\alpha_j=\lambda_j+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k r_{kj},\ j=1,2,\dots,N \tag{1}$$

が成り立つ．ここに，λ_jは外部からノードjへの客の到着率である．(1)を解くことによりα_jが求められる．また，M/M-型入力モデルはすでに解かれているので，ネットワーク状態の定常分布が解析的に求められる．Jackson ネットワークは外部からの到着がない閉鎖型に対しても積形式の定常分布を持つ．この場合には，系内人数は一定であるため，ノードの待ち人数の独立性は成り立たない．また，定常分布を定めるためには正規化定数の計算が必要である．

Jackson ネットワークは，定常分布が簡単であることから，広く応用され，理論的にも，積形式を導く手法を中心に多くの研究の対象とされてきた．しかし，

- 経路をあらかじめ決めて選ぶことができない．
- サービス時間の分布が指数分布に限られている．

などモデルの制約が強く，柔軟性に欠けている．これらの点に関して，1970年代に2つの重要な拡張がなされた．1つは，客を**クラス**（タイプともいう）に分けて，クラスごとに異なる経路選択やサービス時間分布を設定することである．もう1つは，客やクラスごとのサービス時間を一般分布に従うとしたことである．これらの仮定の下でも，サービスの方法が対称型である場合には積形式が成り立つ．ここに，**対称型サービス**（symmetric service）というのは，それぞれの客に番号が付いた場所（これを位置と呼ぶ）が割り当てられ，各位置へ到着がある確率とそこで客が受けているサービスの割合が比例することをいう．例えば，後

着順割り込みサービスでは，最後に到着した客がいつもサービスを受けるが，これは，いつも1人だけサービスを受け，到着客はサービスを受けている客の位置に割り込んで自分がサービスを受ける対称型サービスとして記述できる．この場合にも，ノードごとの分布は，仮想的にポアソン到着を仮定したモデルを解くことにより求められる．

これらの結果は，ほぼ同じころに，BCMP[1]とKelly[11]により独立に得られた．ことに，Kellyは積形式を証明するために時間を逆転させた逆時間過程や**局所平衡**（local balance）を積極的に利用した．また，後述する準可逆性と呼ばれる特性が積形式のための十分条件となることを示した．今日では，このBCMPとKellyによるモデルは標準的なネットワークモデルとして広く使われている．なお，これらのネットワークでは，サービス時間分布を一般化したとき，人数ベクトルの定常確率がサービス時間分布の平均のみで定まる．これを定常分布の**不変性**(insensitivity)という（[7]など参照）．

1980年代になると別の角度からの待ち行列ネットワークの研究がなされるようになった．動機は，計算機やデジタル方式の通信への応用である．これらのシステムでは，時間をスロットに分けた**離散時間型**のモデルが重要である．離散時間型のモデルでは，異なるノードで同時に変化が起こる．また，同一のノードでも，退去や到着が集団で同時に起こりうる．このようなモデルは，Jackson，BCMP，Kellyなどによる連続時間モデルでは表すことができない．

離散時間モデルについては，Walrand[21]が初めて一般的なネットワークに関する結果を得た．S-型待ち行列と呼ばれる連続時間での準可逆性に相当する特徴を持つノードをマルコフ型の経路選択行列で結合すると，ポアソン分布に従う互いに独立な集団到着があったときに，ネットワークの人数ベクトルの定常分布が積形式となることを示した．ただし，集団退去した客は個別に経路を選ぶとする．この結果は，大沢[18]により到着人数分布の一般化が検討されたが，これとは独立に，Henderson & Taylor[10]はより一般化し，ベクトル$\boldsymbol{a}=(a_0, a_1, \dots, a_N)$で表される各ノードからの退去が$\boldsymbol{a}'=(a'_0, a'_1, \dots, a'_N)$で表される到着に確率$r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}')$で変わるとした．ここに，0は外部を表し，$a_0$と$a'_0$は，それぞれ，ネットワークへの退去および到着人数を表している．彼らは，この経路選択に対するトラヒック方程式

$$\nu(\boldsymbol{a})=\sum_{\boldsymbol{a}'}\nu(\boldsymbol{a}')r(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}), \quad \forall \boldsymbol{a} \tag{2}$$

が解νを持ち，ネットワーク状態$\boldsymbol{n}=(n_1, \dots, n_N)$の下で$\boldsymbol{a}$の退去が発生する条件付き確率$p^d$が

$$p^d(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n})=\frac{\Psi(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}^+)}{\Phi(\boldsymbol{n})}\nu(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a}\leq \boldsymbol{n} \tag{3}$$

で与えられるとした．ここに，$\boldsymbol{a}^+=(a_1, \dots, a_N)$，$\Psi$は任意の非負値関数であり，その選択により各種のサービス方法を表すことができる．一方，Φは$p^d(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n})$の$\boldsymbol{a}$についての和が1になることから定まる関数である．このとき，退去直前の状態の定常分布πは

$$\pi(\boldsymbol{n})=K\Phi(\boldsymbol{n}), \quad (K\text{は正規化定数}) \tag{4}$$

により与えられる．この結果も積形式解と呼ぶ文献もありややこしいが，本稿ではその立場を取らない．

これまでに述べてきたモデルのトラヒック方程式（(1)や(2)）はすべて**線形**である（理論的には局所平衡と同値）．これは，到着と退去の率（集団移動型の時は集団の大きさの分布）が等しいことを意味し，集団移動型の1つである回線保留型の呼損ネットワーク（circuit switching loss network）のようによく当てはまる例もあるが，一般にモデル化の制約となっている．

4．負の客とシグナル

1991年Gelenbe[8]は，一風変わったネットワークの研究を発表した．このモデルは基本的には各ノードが窓口1つのJacksonネットワークであるが，通常の経路選択の他に，ノードjを退去した客が確率r^-_{jk}で同時に別のノードkの客を退去させる．この変化は，確率r^-_{jk}でノードjからkに来た客が到着ノードの客を減らすとみなすこともできる．Gelenbeは，このような客を**負の客**（negative customer）と呼んだ．ただし，ノードkに客がいないときにはノードkに変化はない．このモデルの定常分布は，やはり積形式を持つ．しかし，これまでのモデルと異なるのは，ノードjのサービス率をμ_j，そこへの外部からの負の客の到着率をλ^-_jとすると，**非線形なトラヒック方程式**

$$\alpha_j=\lambda_j+\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k}{\mu_k+\alpha^-_k}\alpha_k r_{kj}$$

$$\alpha^-_j=\lambda^-_j+\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k}{\mu_k+\alpha^-_k}\alpha_k r^-_{kj}$$

を持つことである．この方程式で，α_kの前につく$\frac{\mu_k}{\mu_k+\alpha^-_k}$は，総退去の中での客の退去の割合を表している（$\alpha^-_j=0$のとき(1)）に一致することに注意）．

Brouwerの不動点定理からこの方程式が解を持つことが証明できる．また，求めたα_jを平均到着率にもつポアソン過程に従う客の到着をノードjへの到着とみなしてノードjの周辺分布を決めることができる．これは$M/M/1$待ち行列であるから，定常分布π_jは，$\alpha_j<\mu_j$の時にのみ存在し，次式により与えられる．

$$\pi_j(n_j)=\left(1-\frac{\alpha_j}{\mu_j}\right)\left(\frac{\alpha_j}{\mu_j}\right)^{n_j}, \quad n_j=0,1,\ldots$$

この結果は，[5,9,19]などにより，負の客が集団退去を引き起こしたり，負の客が連鎖的に異なるノードの退去を引き起こすモデルへ拡張された．ただし，客のいないノードに到着したときにはそれ以降の動作は取りやめとなる．一般に，このように連鎖的にノードに到着し変化を引き起こす客のことを**シグナル**（signal）と呼ぶ．シグナルは，

- 集団退去や複数のノードからの同時退去，
- 集団到着や複数のノードへの同時到着，

やそれらの組み合わせなどを表すことができる．ただし，到着に関してはモデルの変更が必要となる（9節で述べる）．なお，シグナルの通過はすべて到着と退去に数えトラヒック方程式に反映される．しかし，シグナルの通過はその都度，到着又は退去のいずれか一方の効果しかないので，トラヒック方程式は一般に非線形となる．

5．準可逆性と積形式

これまで負の客やシグナルをもつネットワークの定常分布は，ほとんどが定常方程式を直接確かめることにより求められてきた．そのような方法は，モデルの仮定が複雑になるにつれ，見通しが悪くなり，効率的とはいえない．実は既に述べたが，Kelly[11]は準可逆性が積形式のための十分条件であることを示した．これは一般的な方法であるが，これまでは，線形なトラヒック方程式を持つモデルに対してのみ適用されてきた．Chao & Miyazawa[2]では，ネットワークモデルの記述を抽象化するとともに，この方法を非線形なトラヒック方程式の場合に適用した．このモデル化においては，各ノードは

(a) 到着に反応し状態を変える，

(b) 内部的な変化が起こり状態を変える，

(c) 退去を生成し状態を変える

という機能を持つ部品であるとする．ノードj（部品）の状態がxからx'へ変わるとする．この推移を，(a)の変化では条件付き確率$p_j^a(x,x')$，(b)の変化では，率$q_j^i(x,x')$，(c)の変化では，率$q_j^d(x,x')$で表す．この記述はノードをネットワークから切り離したときのもので，到着過程については何も規定しない．各ノードへの到着はすべてのノードをネットワークへ戻したときに他のノードからの退去より生成される．なお，このモデルでは外部もノードとみなし，ノード0と表す．したがって，ネットワークの状態はベクトル

$$\boldsymbol{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_N)$$

である．このモデル化の重要な点は，到着や退去という用語を使っているが，それらによって引き起こされる状態変化に制限がないことである．これから，たとえば，負の客を取り込むことが可能となる．また，外部も状態を持つので，位相型到着などポアソン以外の到着過程も記述できる．

このネットワークからノードjを切り離し，率α_jのポアソン過程で到着を入力として加えたとき，状態の定常分布π_jが存在したとする．**準可逆性**とは，このときの退去過程が退去直後の状態と独立なポアソン過程となることであり，条件

$$\sum_{x'}\pi_j(x')q_j^d(x',x)=\beta_j\pi_j(x), \quad \forall x \tag{5}$$

により表すことができる．この式と**トラヒック方程式**

$$\alpha_j=\lambda_j+\sum_{k=1}^{N}\beta_k r_{kj}, \quad \forall j \tag{6}$$

を満たすα_j, β_jが存在するならば，ネットワークの状態の分布πはπ_jの積となる．

この結果は客にクラスのある場合も拡張される．ただし，$p_{ju}^a, q_{ju}^d, r_{ju,kv}, \alpha_{ju}, \beta_{ju}$などのように，$\pi_j$と$q_j^i$を除いて，$j$が$ju$等に変わる．さらに，[3]では，シグナルがある場合へ準可逆性の定義を拡張し，積形式が得られている．

準可逆性を持つネットワークを解析する際の1つの大きな課題は，トラヒック方程式(6)を解くことである．一般に，β_jはα_jの非線形な関数であり，(6)は**非線形**方程式となる．これは不動点を求める問題でもあるが，(6)の右辺は必ずしも有界ではないので，不動点定理を使えない場合が多い．一般の場合の解の存在証明は今後の課題として残されている．

6．準可逆性は必要条件か

準可逆性は積形式のための十分条件であるが，必要

条件か？既知の積形式のネットワークはすべて準可逆性を満たしている．例えば負の客やシグナルを持つネットワークなどについてこれを確かめることができる．そこで，準可逆性は必要条件であるとの予想があり，部分的には確かめられてもいた（[13]）．しかし，Takada & Miyazawa[20]（より一般的な結果は[4]にある）は，シグナルがない場合について，この予想を否定する形で問題を以下のように解決した．

ネットワークの状態分布πが積形式（外部を表すノード0も含める）となるための必要かつ十分な条件は，あるα_j, β_jがあって，πの周辺分布π_jが推移率

$$q_j(x_j, x_j') = \alpha_j p_j^a(x_j, x_j') + q_j^d(x_j, x_j') + q_j^i(x_j, x_j')$$

を持つマルコフ連鎖の定常分布であり，(6)および次の式が成り立つことである．

$$(\tilde{q}_j^d(x_j) - \beta_j) r_{jk} (\tilde{p}_k^a(x_k) - 1) + (\tilde{q}_k^d(x_k) - \beta_k) r_{kj} (\tilde{p}_j^a(x_j) - 1) = 0 \qquad (7)$$

ここに，$j=0.1, \ldots$に対して，

$$\tilde{q}_j^d(x_j) = \frac{1}{\pi_j(x_j)} \sum_{x'_j} \pi_j(x_j') q_j^d(x'_j, x_j)$$

$$\tilde{p}_j^a(x_j) = \frac{1}{\pi_j(x_j)} \sum_{x'_j} \pi_j(x_j') p_j^a(x_j, x_j')$$

とする．条件(7)は**相殺平衡**（counter balance）と呼ばれ，ある種のバランスを表している．すぐわかるように，準可逆性(5)が成り立つならば，(7)が満たされる．しかし，準可逆性が成立しないが(7)を満たすネットワークがある，すなわち，準可逆性は必要条件ではない．これらの結果は客にクラスがあるときに容易に拡張される．

先に述べたように，外部も1つのノードであり，例えば，位相型の到着に対しても積形式かどうかの判定ができる．特に，外部からの到着がポアソン過程に従うときには，$q_0^d(x_0) = \beta_0$が成り立つので，外部との経路があるノードとノード0のペアについては，条件(7)は自動的に満たされる．この場合には，状態ベクトルからノード0の状態を除くことができる．

条件(7)を使うと，準可逆性が必要となる各種の条件を与えることができる．たとえば，外部からポアソン到着があるモデルにおいて，ノードが空の状態を0とし，0では内部推移は起こらない，0では退去はない，到着後に0とならないとする．また，退去が外部へのみ行くノードを端末ノードと呼ぶ．このとき，トラヒック方程式が線形ならば，非端末ノードはすべて準可逆である．これは[13]の結果に一致する．

7．積形式から状態依存型へ

準可逆性は積形式の必要条件でないことはわかったが，準可逆性からは積形式以外の結果，たとえば，平衡方程式を細分化した局所平衡方程式が導かれる．ただし，非線形トラヒックの場合には，通常の局所平衡は成立せず，**偏りのある局所平衡**（biased local balance）となる．これを簡単に述べると，$\sum_{j=0}^{N} \gamma_j = 0$となる$\gamma_j$があり，$x$をネットワーク状態とするとき，

$$\text{(状態が}\boldsymbol{x}\text{であり}j\text{からの退去がある率)} + \gamma_j \pi(\boldsymbol{x}) = (j\text{への到着により状態が}\boldsymbol{x}\text{となる率}) \qquad (8)$$

である．(8)と積形式から準可逆性が得られるが，もっと重要なことは，退去率$q_j^d(x_j, x_j')$をネットワーク全体の状態に依存するある形に変更できることである．この変更は，線形なトラヒックモデルに対しては既知であるが，Miyazawa & Chao[15]は非線形トラヒックモデルに対しても同様な変更ができることを示した．

これを，客を減らす負のシグナルがある準可逆性を持つネットワークについて説明する．簡単のために，各ノードでサービスを受ける客の種類は1つ，サービス時間はすべて指数分布に従うとする．また，シグナルは外部から到着し，経路選択確率に従って連続的に経路を選ぶが，空のノードに到着，または，外部に退去したときには停止する．客をc，シグナルをsで表すと，到着，退去，シグナル通過の推移は，

$$p_{jc}^a(n, n+1) = 1,$$
$$p_{js}^a(n+1, n) = 1, \quad p_{js}^a(0,0) = 1$$
$$q_{jc}^d(n, n-1) = \mu_j 1(n \geq 1),$$
$$f_{js,s}(n, n-1) = 1(n \geq 1)$$

と表せる．ここに，μ_jはノードjのサービス率であり，$1(\cdot)$は$(\cdot)$が正しければ1，そうでなければ0であり，$f_{js,s}(n, n')$はシグナルの到着により状態がnからn'へ変化したとき，シグナルが転送される確率である．このネットワークの定常分布πは幾何分布の積であり，そのパラメーターは(6)と同様な非線形トラヒック方程式を解くことによって決められる．

このネットワークの到着，退去の推移をネットワーク全体の状態$\boldsymbol{n}$に依存する形で次のように変更する．$\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{n}'$に対して，

$$\tilde{p}_{js}^a(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = 1(\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_j) p_{js}^a(n_j, n_j') \frac{\Psi(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_j)}{\Psi(\boldsymbol{n})},$$

$$\tilde{q}_{jc}^d(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}') = 1(\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_j) q_{js}^d(n_j, n_j') \frac{\Psi(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_j)}{\Psi(\boldsymbol{n})}.$$

ここに，e_jはj-番目の要素のみ1である単位ベクトル，$\Psi(\boldsymbol{n})$は$\boldsymbol{n}$の任意の非負値非減少関数，Φは任意の正値関数である．なお，シグナルの到着効果を現すp^0_{js}も変更されていることに注意されたい．(8)から，変更されたネットワークの定常分布$\tilde{\pi}$が

$$\tilde{\pi}(\boldsymbol{n})=K\Phi(\boldsymbol{n})\pi(\boldsymbol{n}) \quad (K\text{は正規化定数}) \tag{9}$$

となることを証明できる．この結果は内部推移がある場合，客にクラスがある場合，客の数を増やす正のシグナルがある場合などに拡張できる．

8．状態に依存する経路選択

複数のノードからの同時退去と経路選択ががネットワーク全体の状態に依存する一般的なネットワークを考えてみよう．このモデルは，[10]のモデルをさらに一般化したものであり，解析は困難である．しかし，モデルの抽象化により準可逆性が再検討されたように，そのような一般化により，解析可能なモデルの範囲を明確にすることができる．

[10]と同様な集団移動を考えるが，時間は連続とする．ネットワーク状態が$\boldsymbol{n}$のとき$\boldsymbol{a}$が退去したという条件の下で，$\boldsymbol{a}'$が到着して状態が$\boldsymbol{n}'$に変わる確率を$r((\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{a}'))$とする．なお，$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{a}'$の総人数は等しく，状態変化は

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}-\boldsymbol{a}^{+}+(\boldsymbol{a}')^{+} \tag{10}$$

である．rの中に$\boldsymbol{n}'$は必要ないが，対称性を保つために入れておく．定常状態が存在すると仮定し，ネットワーク状態が$\boldsymbol{n}$のとき，ベクトル$\boldsymbol{a}$で表される集団の平均到着率を$\nu(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})$，ベクトル$\boldsymbol{a}$で表される集団の平均退去率を$\nu^*(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})$とすると，トラヒック方程式

$$\nu(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})=\sum_{\boldsymbol{n}',\boldsymbol{a}'}\nu^*(\boldsymbol{n}',\boldsymbol{a}')r((\boldsymbol{n}',\boldsymbol{a}'),(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a})) \tag{11}$$

が成り立つ．特に，$\nu=\nu^*$ならば線形である．退去と到着の総数が等しいことと(10)から，rを推移確率とするマルコフ連鎖の状態空間は有限個の状態からなる規約な集合（rの推移で移ることができる状態の集まり）に分割することができる．この集合を代表する元を$\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle$と表す．有限マルコフ連鎖に関する結果より，$r$の定常分布が常に存在する．1つではないので，適当に1つ選びηと表す．

以上の仮定の下で，次の条件は同値である（[14]）．

（i）線形なトラヒック方程式を持つ．

（ii）ある非負値関数Ψと正値関数Φがあって，条件付き退去率q^dが次の式で表される．

$$q^d(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{n})=\frac{\Psi(\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}\rangle)}{\Phi(\boldsymbol{n})}\eta(\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}) \tag{12}$$

（iii）時間を逆転したときに同じ条件付き退去率を持つネットワークになる（経路選択行列rは一般に異なる）．

また，これらのいずれかが成り立つならば，ネットワークの状態の定常分布πは

$$\pi(\boldsymbol{n})=K\Phi(\boldsymbol{n}) \quad (K\text{は正規化定数}) \tag{13}$$

により与えられる．

この結果は3節で述べた[10]の結果を含むとともに，状態依存型の経路選択モデルなどに広く応用できる．ただし，応用に際しては，モデルにうまく適合するΨとΦを見つけることが必要である（[14]に例がある）．

9．エピローグ

前節の結果は，状態に対応するミクロレベルにトラヒックを分けたときにトラヒック方程式が線形になるならば，モデルの解析が可能であることを示している．しかし，この線形性の制約は強く，到着と退去に対する対称性が必要である．これに対し，積形式ネットワークの線形トラヒック条件はマクロレベルであり，必ずしも強い条件ではないが，集団退去や複数のノードでの同時変化がある時には，トラヒック方程式が非線形となってしまう．

この非線形性のもたらす複雑さは，集団移動型の線形トラヒック条件をゆるめ，到着と退去の対称性を取り除くための代償といえる．ただし，同時到着に関しては，準可逆性を保持するためにノードが空の時に余分な到着を追加する必要がある．したがって，積形式を持つのは元のモデルの上限を与えるモデルである．このようなモデルは［3,16,22］で論じられている．この上限がどの程度よいかなど今後検討すべき課題は多い．また，積形式ネットワークがカバーする範囲が広がったので，実際の問題への応用も期待される．

このように積形式については研究課題が多く残されているが，その限界もまた事実である．例えば，流体のネットワークでは，各ノードでの蓄積量が独立になることは考えがたい．したがって，相関の入った次の標準分布形が望まれる．残念ながらこの方向の研究はあまり成功していない．式(9)はその1つの可能性であるが，特殊な状況である．現状では，次の標準型を探すよりは，分布の裾の減少率などの漸近的な量に注目する，時間軸や状態空間をスケール変換し確率過程

としての漸近的振る舞いを調べる（極限は流体近似や拡散近似になる）など，漸近的または近似的なアプローチの方が可能性が高い。ただし，これらの方法も多次元になると克服すべき課題が多い。

最後に，ネットワークについての共同研究でお世話になった方々と，本稿について貴重なコメントをいただいた東北大学の山下英明氏に心から感謝したい。

参考文献

[1] F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz and F. G. Palacios (1975) Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers, J. ACM 22, 248-260.

[2] X. Chao and M. Miyazawa (1996a) On quasi-reversibility and local balance : An alternative derivation of the product-form results, to appear in Opns. Res.

[3] X. Chao and M. Miyazawa (1996b) Queueing networks with instantaneous movements : a coupling approach by quasi-reversibility, preprint.

[4] X. Chao, M. Miyazawa, R. Serfozo and H. Takada (1998) Markov network processes with product form stationary distributions, to appear in Queueing Systems.

[5] X. Chao and M. Pinedo (1993) On generalized networks of queues with positive and negative arrivals, PEIS 7, 301-334.

[6] J.G. Dai (1995) On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks : a unified approach via fluid limit models, Ann. Appl. Prob. 5, 49-77.

[7] P. Franken, D. König, U. Arndt and V. Schmidt (1982), *Queues and Point Processes*, Wiley.

[8] E. Gelenbe (1991) Product-form queueing networks with negative and positive customers, J. Appl. Prob. 28, 656-663.

[9] E. Gelenbe (1993) G-networks with signals and batch removal, PEIS 7, 335-342.

[10] W. Henderson and P. G. Taylor (1990) Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services, Queueing Systems 6, 71-88.

[11] F. P. Kelly (1979) *Reversibility and Stochastic Networks*, Wiley.

[12] J. R. Jackson (1957) Networks of waiting lines, Opns. Res. 5, 518-521.

[13] Y.V. Malinkovsky (1990) A criterion for pointwise independence of states of units in an open stationary Markov queueing network with one class of customers, Theory of Prob. Appl. 35, 797-802.

[14] M. Miyazawa (1997) Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing, Queueing Systems 25, 45-75.

[15] M. Miyazawa and X. Chao (1998) Generating a queueing network with signals and state dependent local transitions from a quasi-reversible network, preprint.

[16] M. Miyazawa and P.G. Taylor (1997) A geometric product-form distribution for a queueing network with nonstandard batch arrivals and batch transfers, Adv. Appl. Prob. 29, 523-544.

[17] M.F. Neuts (1981) *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press.

[18] H. Ōsawa (1994) Quasi-reversibility of a discrete-time queue and related models, Queueing Systems 18,133-148.

[19] R. F. Serfozo and B. Yang (1996), Markov network processes with string transitions, preprint.

[20] H. Takada and M. Miyazawa (1997), Necessary and sufficient conditions for product-form queueing networks, preprint.

[21] J. Walrand (1983) A discrete-time queueing network, J. Appl. Prob. 20, 903-909.

[22] H. Yamashita and M. Miyazawa (1998), Geomet-ric Product Form Queueing Networks with Con-current Batch Movements, to appear in Adv. Ap-pl. Prob.