講座

AHPからANPへの諸問題 VI

高橋　磐郎

8.　ANPの成績評価への応用

ANPには多方面の応用がある。Saaty氏の本(第一講[4])の中には大規模な多くの応用例があるが、ここでは学生の成績評価の問題を取り上げてみよう。

大学のような選択科目制の場合でも、従来は単なる平均点で学生の成績が評価されるのが普通である。単位を多くとった者もまた少ない者も、また科目の難易にも、無関係に平均点のみで評価するというのは疑問であると思っている人も多いと思う。しかし平均点という従来からの根強い習慣に支配されてしまっているのが現状であろう。これに対するANP的解法をはじめに述べようと思う。

もう一つは入試などによく現れるが、科目によって選択制の物が含まれる場合の評価法である。たとえば理系の大学入試では、数学、英語が必修で、理科は、生物、化学、物理のいずれかを選択するというのがほとんどである。この場合、点数をどのように調整すべきかについては色々考えられているようだが、これに対するANP的解法を述べよう。

8.1　選択科目制における成績評価

簡単な仮想例を通して方法を説明しよう。5人の学生が3科目を選択して表1のような成績が得られた。

この場合科目というクラスタと学生というクラスタがあるケースである。まず、各科目がそれを選択した学生を評価することになるが、その評価値は点数のそのままと考えれば良い。しかし各評価者の評価値の和は1であるという大原則(§6.2(6.7)式)から、これを基準化しなければならない。その結果が表2のようになる。このステップで科目の難易や点の甘さ辛さが平準化される。

さて次に学生の科目の重要度に対する評価はどう考えればよいだろう。各学生が自分の選んだ科目の重要度を自ら選んで申告するというシステムが理想的であるが、現状では、科目に同等のウェイトをおくというシステムが妥当であろう。(むろん科目によって単位が異なる場合はそれを考慮に入れねばならない。)そうすると表2のように科目の選択数のみによってウェイトが決まる。

表1: 成績

科 学	1	2	3	平均点
1	40	50		45
2	80	50	30	53.3
3	80			80
4		50	70	60
5		100		100

表2: 成績評価の超行列

	1	2	3	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1/2	1/3	1	0	0
2	0	0	0	1/2	1/3	0	1/2	1
3	0	0	0	0	1/3	0	1/2	0
1	.2	.2	0	0	0	0	0	0
2	.4	.2	.3	0	0	0	0	0
3	.4	0	0	0	0	0	0	0
4	0	.2	.7	0	0	0	0	0
5	0	.4	0	0	0	0	0	0

表2がこの問題の超行列であり、これに対して科目の総合評価値をx_1, x_2, x_3、学生の総合評価値をy_1, y_2, y_3, y_4, y_5として、基本方程式(§7.2(7.5)式)を作って、それを解くと、

$$x_1 = 0.285 \qquad y_1 = 0.156$$

$$x_2 = 0.496 \qquad y_2 = 0.279$$

たかはし　いわろう　日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$$x_3 = 0.219 \qquad y_3 = 0.114 \qquad (8.1)$$
$$y_4 = 0.253$$
$$y_5 = 0.198$$

となる。

一般に多くの学生が選択する科目(たとえば科目2)は、和を1にするという基準化によって、学生一人当たりの取り分が少なくなるから不公平に見えるが、その分そのウェイトは高くなる($x_2 = 0.496$)のでバランスがとれている。

またこの方法によると一般に多くの科目を選択している学生は、単なる平均よりは高く評価される。たとえば学生2は平均点ではビリから2番であるが、この方法では1番である。多くの科目をとることは、それだけ労力も必要だから、これは妥当な評価と言える。

8.2 必修、選択科目の調整

簡単のため科目Aが必修、B,Cが選択という3科目の場合を考えよう。学生1〜kはBを、$k+1$〜nはCを選択したとしよう。

これに対する超行列は表3のようになる。(むろん各科目の点a_i, b_j等は和が1の基準化がほどこされている。)

科目の総合評価値をu, v, w, 学生のそれを$x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$とすると、基本方程式は

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_k \quad + \ x_{k+1} + \cdots + x_n)/2 &= u \\ (x_1 + \cdots + x_k)/2 &= v \qquad (8.2) \\ (x_{k+1} + \cdots + x_n)/2 &= w \end{aligned}$$
$$x_i = ua_i + vb_i \qquad (i = 1 \sim k) \qquad (8.3)$$
$$x_j = ua_j + wc_j \quad (j = k+1 \sim n) \qquad (8.4)$$

となる。

ここで

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_B \ (\text{Bをとった学生の科目Aの点の和})$$
$$\sum_{j=k+1}^{n} a_j = a_C \ (\text{Cをとった学生の科目Aの点の和}) (8.5)$$

として、(8.3)の総和をとって(8.2)をみると、$2v = ua_B + v$となるから$v/u = a_B$、同様に(8.4)から$w/u = a_C$となるので(8.3),(8.4)は

$$\begin{aligned} x_i/u &= a_i + a_B b_i \quad (i = 1 \sim k) \\ x_j/u &= a_j + a_C c_j \quad (j = k+1 \sim k) \qquad (8.6) \end{aligned}$$

表 3: 入試の超行列

	①	②	③	1	...	k	$k+1$	...	n
①	0	0	0	1/2	...	1/2	1/2	...	1/2
②	0	0	0	1/2	...	1/2	0	...	0
③	0	0	0	0	...	0	1/2	...	1/2
1	a_1	b_1	0	0	...	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	a_k	b_k	0	0	...	0	0	...	0
$k+1$	a_{k+1}	0	c_{k+1}	0	...	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	a_n	0	c_n	0	...	0	0	...	0

となる。

この(8.6)式が学生の総合評価式となる。(一定倍$1/u$は基準化によって決まるので考える必要はない。)この評価法は、選択科目の点には、それを選択した学生全体の必修科目の出来栄えで、ウェイト付けするという単純な物であるが、私の知る範囲では、未だかつて知られていない物である。

理系の大学のように、英語、数学という2科目が必修で、生物、化学、物理という3科目が選択である5科目システムではどのようになるかは読者の練習に委ねることにしよう。

9. AHPにおけるデザイン問題

AHPでは一対比較のデータから対象の特性を推定することが原則であったが、対象の数nが大きくなると、その一対比較数は${}_nC_2 = n(n-1)/2$となって、nの2乗のオーダーで増大するので、データを得る手間がかかる。そこで全ての一対比較データを調べないで、その一部だけを選んで対象の特性を推定しようという考えがおこる。

このような、一部のデータだけからの推定には、§4でのべた不完全情報の解析法が利用できるが、この場合選ぶべき対の数$m(< {}_nC_2)$が与えられたとき、どのような対を選べば最も精度の良い推定ができるか、という問題がおこる。

これは統計学でいうデザイン問題と呼ばれるものである。むろんmを大きくすればよい精度が得られるが、一定のmの下でも、うまい選び方と下手な選び方では精度に大きな差ができる。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

n個の対象をn個の点とみて、その対を枝とみることによって、(無向) グラフが対応するが、デザイン問題とは、n点m枝のグラフを選ぶことに相当する。(すべての対を調べる、いわゆる完全情報の場合は、すべての2点を結ぶ枝をもつ完全グラフに相当する)。したがってAHPにおけるデザインとはどのようなグラフを選ぶかという問題となる。このデザイン問題の詳細は[3]にのべられているが、ここではその骨子を概説しよう。

結論を言えば、「デザインのよいグラフとは強正規 (strongly regular) グラフである」ということになるが、強正規グラフは、まれにしか存在しないし、中々作りづらいので、準強正規グラフで代用しても実用上は結構よい精度が得られる。そこで強正規、準強正規グラフとは何か、またそれによる推定の精度の解析はどのようにすればよいかと言った問題をつぎにのべよう。

9.1 強正規グラフと準強正規グラフ

まず正規グラフについてのべよう。ある点に繋がっている枝の個数をその点の連結度数 (あるいは単に度数) と呼び、どの点の度数も同じdであるグラフを (度数dの) 正規グラフという。度数dのn点正規グラフの枝の数mは$m = nd/2$となることは容易にわかる。

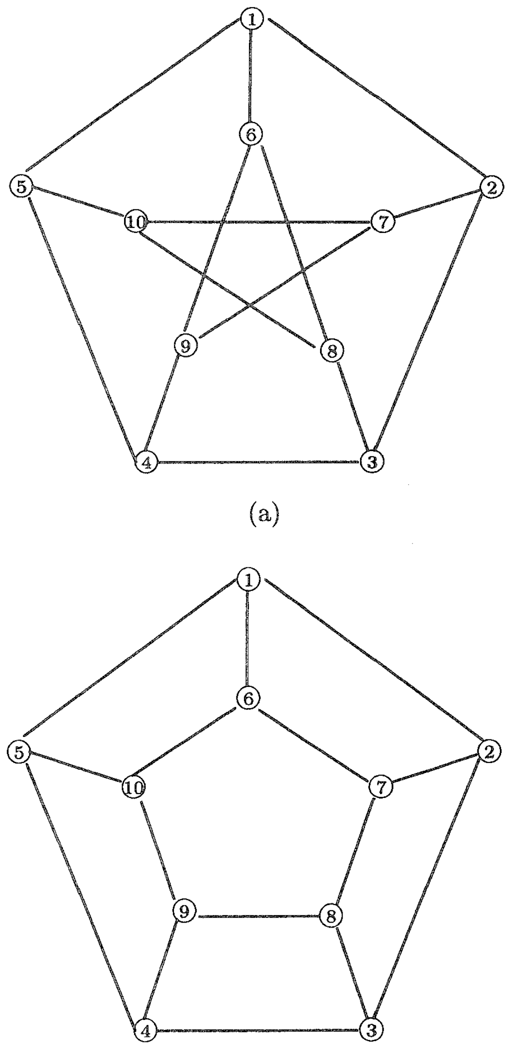
点iとjとの間に枝があるとき(この2点i, jは隣接するというが)$a_{ij} = 1$そうでないとき$a_{ij} = 0$とするとn点グラフには行列$A = [a_{ij}]$が対応する、これを隣接行列と言う。ここで考えるグラフはループがなく、2重枝はないもので、このようなグラフを単純グラフと言う。完全グラフの隣接行列は、対角元は0で他の要素はすべて1となる。またゼロ行列を隣接行列とするグラフ、つまり点のみで枝のないグラフ、を空グラフと呼ぶ。

度数dのn点正規グラフの隣接行列Aは、つぎの性質をもつ

$$AJ = JA = dJ \tag{9.1}$$

ここで、Jはすべての要素が1である行列。さて強正規グラフとは、次の性質をもつ (空グラフでも完全グラフでもない) 正規グラフのことである；

(i) 点iとjとが隣接しているとき、iとjとの両方に同時に隣接している点の個数が、iとjとに関係なく、一定でλである。



(a)

(b)

図 1: 強正規グラフと非強正規グラフ

(ii) 点iとjとが隣接していないとき、iとjとの両方に同時に隣接する点の個数が、iとjとに関係なく、一定でμである。

図1(a)のグラフは、$n = 10, m = 15, d = 3, \lambda = 0, \mu = 1$の強正規グラフである。たとえば①と②とは隣接していて、この両者に同時に隣接する点は存在しないから$\lambda = 0$である。⑥、⑧など他の隣接2点についても同様にこの両者に隣接する点は存在しない。一方隣接していない2点、たとえば、①、⑦に同時に隣接する点として②が存在するから$\mu = 1$である。他の非隣接2点⑥、⑦にも隣接する唯一点⑨が存在する。

図1(b)は(a)と似ているが、これは強正規ではない。たとえば非隣接2点②、⑥に同時に隣接する点①、⑦があるが、他の非隣接⑥、⑧に対して同時に隣接する点は⑦の一点しかない。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(i)(ii)の条件をもう少し簡単に、つぎのように言いかえることもできる；どの点からもそれに隣接する（しない）どの点へも、2ステップで（2本の枝を通って）行けるパスの本数はつねに$\lambda(\mu)$である。この観点からすると、強正規グラフの隣接行列$\boldsymbol{A}$はつぎの性質をもつことが容易にうなづける；

$$\boldsymbol{A}^2 = a\boldsymbol{I} + b\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{J},$$
$$a = d - \mu,\ b = \lambda - \mu,\ c = \mu \tag{9.2}$$

これは$\boldsymbol{J}$と$\boldsymbol{A}$とが生成する代数系（多元環）が1次であることをいみしている。つまり$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{J}$との間に行列としての積や和をどのように繰返しほどこしても、その結果はつねに$\boldsymbol{J}$と$\boldsymbol{I}$と$\boldsymbol{A}$のみの（整数係数の）1次結合で表わせることを意味している。

また(9.1)および（整係数$a,\ b,\ c$で）(9.2)をみたす隣接行列$\boldsymbol{A}$をもつグラフは強正規であることも証明されている[1]。図1(a)の隣接行列$\boldsymbol{A}$は

$$\boldsymbol{A}^2 = 2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{J}$$

をみたすことが、直接計算してもまた(9.2)からもわかる。

あとでのべるように、n点m枝の強正規グラフに基づくデザインは、同じn点、m枝の他のグラフに比べて、よい推定精度を与えるが、それは隣接行列の線形代数的な1次性に基因すると思われる。

しかし強正規グラフが存在するn, mの組合わせは極めてまれである。そこで、強正規性を拡張、緩和して準強正規グラフなる概念を導入しよう。隣接行列$\boldsymbol{A}$がつぎの条件をみたす正規グラフをr次の準強正規グラフと呼ぶことにする；

$$\boldsymbol{A}^{r+1} = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_r\boldsymbol{A}^r + a_{r+1}\boldsymbol{J}$$
$$(a_i \text{は整数、} i = 0 \sim r+1) \tag{9.3}$$

1次の準強正規グラフは強正規グラフである。

むろんrを十分大きくとればどんなグラフでも(9.3)をみたすが、準強正規というときはrは比較的小さく、せいぜいn以下でなければならないとする。

9.2 諸デザインに基づく推定の誤差解析

以上のべた様々なデザインによって得られた一対比較データは、当然不完全情報の場合に相当するが、その場合の対象ウェイトの推定法には§4でのべたように、Harker法、二段階法、LLS法などがある。どのようなデザインがよいかを判定するには、それに基づく推定の誤差の大小によってなされるべきであるが、以上の3方法のうち推定の誤差解析に最も便利なのはLLSであるので、これに基づく誤差解析の方法をのべておこう。

むろんLLSは連続モデル（§3.1(3.1)式）に基づいたもので、AHPデータの離散性（§3.3）はこのモデルにそぐわないが、いままでみてきたようにこれら3方法はいづれも似通った結果を与えるから、LLSでよいと判定されたデザインは他の解析法でもよい結果を与えるとみてさしつかえないだろう。

あるデザインが与えられたとき、これに対応するグラフ$\mathbf{G}$の枝(i, j)に対する一対比較データが得られることになるが、$\mathbf{G}$をn点グラフとしてその枝全体の集合をEとすると、$\dot{a}_{ij} = \log a_{ij}$に対するモデルは、§3.1(3.2)式のように

$$\dot{a}_{ij} = \dot{u}_i - \dot{u}_j + \dot{e}_{ij},\ (i,\ j) \in E \tag{9.4}$$

となる。

LLSは$\dot{e}_{ij}$を誤差と見た最小二乗法であるが、AHPのウェイト$u_1, \cdots, u_n$は定数倍は任意であるから、§3.2でみたように、$\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n$に対して

$$0 = \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \cdots + \dot{u}_n \tag{9.5}$$

という条件が付加される。

$\mathbf{G}$としてたとえば図1(a)を考えてみよう。これに対して(9.4)と(9.5)とを表の形にまとめてみると、表4のようになる($\dot{e}_{ij}$は省略してある)。このような表をしばしばデータ表と呼ぶ。データ表の右辺の係数行列を$\boldsymbol{X}$、左辺の定数ベクトルを

$$\dot{\boldsymbol{a}} \ = \ [\dot{a}_{12}, \dot{a}_{23}, \cdots, \dot{a}_{5,10}, 0]^T$$

また

$$\dot{\boldsymbol{u}} \ = \ [\dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_{10}]^T$$

とすると、モデル(9.4)(9.5)は、

$$\dot{\boldsymbol{e}} = [\dot{e}_{12}, \dot{e}_{23}, \cdots, \dot{e}_{5,10}, 0]^T$$

として、

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{e}} \tag{9.6}$$

と書くことができる。

§3.2でのべた方法をまとめると、(9.4)、(9.5)（あるいは(9.6)）に対する最小二乗推定 $\hat{\boldsymbol{u}} = [\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_n]$ は、$\dot{\boldsymbol{u}}$に関する方程式

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{X}^T\dot{\boldsymbol{a}} \tag{9.7}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

表 4: データの表

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
a_{12}	1	−1								
a_{23}		1	−1							
a_{34}			1	−1						
a_{45}				1	−1					
a_{15}	1				−1					
a_{68}						1		−1		
a_{69}						1			−1	
a_{79}							1		−1	
$a_{7,10}$							1			−1
$a_{8,10}$								1		−1
a_{16}	1					−1				
a_{27}		1					−1			
a_{38}			1					−1		
a_{49}				1					−1	
$a_{5,10}$					1					−1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

の解となることがわかる（くわしくは[2]）。(9.7)は最小二乗法における正規方程式と呼ばれているものである。この正規方程式における左辺の係数行列$X^T X$は最小二乗法において極めて重要な役割をもつもので、しばしば情報行列と呼ばれる。これを$M = X^T X$とすると、最小二乗推定$\hat{\boldsymbol{u}}$は

$$\hat{\boldsymbol{u}} = M^{-1} X^T \dot{\boldsymbol{a}} \tag{9.8}$$

となる。（むろんMの逆行列が存在するようなデザインを考えてのことである）。

(9.4)における誤差$\dot{e}_{ij}$が、期待値0、分散σ^2で独立な確率変数であるという条件の下で、最小二乗法に関するつぎの基本定理が成立つ[2]。

定理 1 最小二乗推定(9.8)は不偏推定、つまり

$$E[\,\hat{u}_i\,] = \dot{u}_i \qquad (i = 1 \sim n) \tag{9.9}$$

であって、M^{-1}のi行、j列要素をM^{ij}とすると、$\hat{u}_i$と$\hat{u}_j$との共分散$V[\,\hat{u}_i,\,\hat{u}_j\,]$は$M^{ij}$の$\sigma^2$倍である。

$$V[\,\hat{u}_i,\,\hat{u}_j\,] = M^{ij}\sigma^2 \tag{9.10}$$

□

$\hat{u}_i$が不偏推定であるから、その精度はその分散$V[\,\hat{u}_i\,]$で測ることができる。(9.10)で$i = j$の場合が$\hat{u}_i$の分散であるから、結局

「$\hat{u}_i$の分散（つまり精度）はM^{-1}の対角元（をσ^2倍）したもので測ることができる」 (9.11)

これが誤差解析の基本原則である。

以上の結果からわかるように、LLSでの誤差評価はデータa_{ij}にも無関係で、デザインXのみに依存する。これがHarker法や二段階法にはない利点である。

さらにデザインが度数dの正規グラフになる場合、その隣接行列をAとすると、このデザインに対する情報行列Mは

$$M = dI + J - A \tag{9.12}$$

となり、その逆行列M^{-1}の対角元はどれも同一の値になることが容易にわかる[3]。

図1(a)のグラフに対して、M^{-1}の対角元M^{ii}は、(9.11)(9.5)を用いて直接計算すると、17/50となる。したがって

$$V[\,\hat{u}_i\,] = \frac{17}{50}\sigma^2 = 0.345\sigma^2 \quad (i = 1 \sim 10) \tag{9.13}$$

となる。また図1(b)に対しては、同じような計算をして（あるいは直接数値計算をしてもよいが）

$$V[\,\hat{u}_i\,] = \frac{337}{950}\sigma^2 = 0.355\sigma^2 \quad (i = 1 \sim 10) \tag{9.14}$$

を得る。同じ正規でも強正規である図1(a)の方がやや精度がよいことがわかる。

一般に正規でないグラフに対するデザインではM^{ii}の値はiによって異なるから、デザインの良さを論ずるには$\max(V[\,\hat{u}_i\,])$で測るのが妥当である。この点から考えても、同一のn, mに対しては、正規グラフのものが良い精度を与えることは、直観的に自明である。

[3]には$n = 4 \sim 20$の各nに対して、色々なmについて、準強正規グラフ、強正規グラフに対するデザインの誤差$V[\,\hat{u}_i\,]$の値が4頁にわたる表にのせられている。この範囲では、強正規のものが準強正規よりよいことが示されているが、その理論的証明はできていない。また準強正規の場合次数が低いものが良い精度を与えるかというと必ずしもそうではない。

何が最良なのかという理論的研究にはまだ多くの問題が残っているが、実用的には[3]の内容はかなり役に立つと思われる。

この講座を終えるにあたって、これを企画されまた毎回原稿を丁寧に読んで、誤りやわかりにくいところ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

を指摘していただいた、成蹊大の上田徹先生ならびに原稿をワープロできれいに仕上げて貰った王克義君はじめ、私の研究室の諸君に深く感謝の意を表したいと思います。

参考文献

[1] P.J.Cameron and J.H.Van Lint: "Graph Theory, Coding Theory and Block Designs", Combridge Univ. Press, London (1975).

[2] 高橋磐郎, 小林竜一, 小柳芳雄:"統計解析", 培風館 (1994).

[3] Keyi Wang and Iwaro Takahashi:"How to select Paired Comparisons in AHP of Incomplete Information- Strongly Regular Graph Design", *Journal of Operation Research Society of Japan*, Vol.41, No.2, (1998).

[誤り訂正記事]

第3講162頁の$\tilde{\boldsymbol{A}}$等をつぎのように訂正して下さい。

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2.245 \\ 0.5 & 1 & 0.707 & 1 \\ 0.5 & 1.414 & 1 & 2 \\ 0.445 & 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.442 \\ 0.631 \\ 0.396 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{\max} = 4.04$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.