講座

AHP から ANP への諸問題 V

高橋　磐郎

7.　ANPの解法

ここまでで、ANPと相互評価問題とは数学的にはまったく同じ構造を持つシステムであって、その超行列に対するグラフ的特徴から様々なパターンがあることをみてきた。つまり既約(強連結)か否か、また同じ既約であっても原始か否かの区別があり、これらによってANPの解析法が少しずつ異なってくるのである。そこでANPの解法を述べる前に行列の性質について述べておこう。

7.1　既約行列、原始行列の性質

さて、既約行列や原始行列の行列としての性質がANP解析に極めて重要な役割を果たす。

定理 1 確率行列が既約行列であれば、その最大固有値は1であって、それは(固有方程式の)単根である。したがって対応する固有ベクトルは(定数倍を除いて)一意に決まり、かつその成分はすべて正である(ゼロは含まれない)。

この定理は§2.3で述べた定理1とほぼ同様の形式で、フロベニウスの定理から証明される。原始行列は既約行列であるから、定理1は無論原始行列についても成り立つが、原始行列の場合はさらに次の定理が成り立つ。

定理 2 確率行列が原始行列であれば、最大固有値 $\lambda_{\max}(=\lambda_1)$ 以外の固有値 $\lambda_2, \lambda_3, \cdots$(一般には複素数も含まれる)の絶対値はつねに1より小さい。つまり

$$|\lambda_j| < 1 \qquad (j = 2, 3, \cdots) \tag{7.1}$$

この定理の証明はやはり、ここでは省略するが第1講[4]に詳しい。この定理は、後ほど述べるように、ANP解析のときの超行列の主固有ベクトルをパワー法で求めるときの収束の保証を与えてくれる。

さて既約行列に対する定理2に相当する内容はどのようになるかというと、先に述べた周期の概念が重要な役割を持つ次の定理で示される(第1講[4])。

定理 3 確率行列が周期 c の既約行列であれば、絶対値が1となる固有値は(最大固有値1を含めて)丁度 c 個だけ存在する。これらを $\lambda_1(=\lambda_{\max}), \lambda_2, \cdots, \lambda_c$ とすると

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_c| = 1 \tag{7.2}$$

であって、これ以外の固有値の絶対値はすべて1より小さい。

実際に計算してみると§6例1の行列の周期は2でその固有値は最初の2つだけが絶対値が1となる。また§6例4の行列Aの周期は3であるが、Aの固有方程式は

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

となるので、$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ となり、これらは1の3乗根である。一般に定理3の $\lambda_1, \cdots, \lambda_c$ は1の c 乗根となる。

7.2　ANP解析の基本原理

まず簡単な例として、§6で述べた図3のパターンを例にとって解析の原理を考えてみよう。これは2つのクラスター A, B からなり、A クラスターの要素は $A_1, \cdots, A_a$ で B クラスターは $B_1, \cdots, B_b$ からなり、その超行列は

$$S = \begin{bmatrix} 0 & V \\ W & 0 \end{bmatrix}$$

たかはし　いわろう　日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

$$
= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_{11} & \cdots & v_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & v_{a1} & \cdots & v_{ab} \\ w_{11} & \cdots & w_{1a} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{b1} & \cdots & w_{ba} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)
$$

の形をしていて、これは既約であり、その周期は2であることを思い起こそう。

ここでWはクラスターAのBへの評価行列、VはBのAへの評価行列である。このように超行列が与えられたとき、各対象の総合評価をどのように定めるかがANPの解析法である。

$A_1,\cdots,A_a$の総合評価を$x_1,\cdots,x_a$、$B_1,\cdots,B_b$のそれらを$y_1,\cdots,y_b$とすると、§2.5で述べた総合評価の基本方程式(2.7)あるいは(2.8)から、

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{a1} & \cdots & v_{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_b \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{b1} & \cdots & v_{ba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_a \end{bmatrix} \quad (7.4)
$$

が成り立たねばならない。

$$
\boldsymbol{x}^T = [x_1 \cdots x_a],\ \boldsymbol{y}^T = [y_1 \cdots y_b]
$$

としてまとめると

$$
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} \quad (7.5)
$$

となる。さらに$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$をまとめて$a+b$次元のベクトルとして(7.5)を書き直すと

$$
\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{W} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \quad (7.6)
$$

となる。

§6.2の(6.8)式のような一般の場合の超行列に対しても、その各対象$1,2,\cdots,n$の総合評価を$x_1,\cdots,x_n$とすると、たとえば対象1は各$j=2,\cdots,n$からu_{1j}の評価を受け、j自身の総合評価がx_jであるから、やはり§2.5の(2.7)式から

$$
u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = x_1
$$

が成り立つ。同様にx_2は

$$
u_{21}x_1 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = x_2
$$

となり、以下同様の関係が成立し、これらをまとめると

$$
\begin{bmatrix} 0 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & 0 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (7.7)
$$

となる。この左辺の係数行列は超行列$\boldsymbol{S}$であるから、(7.7)式は$\boldsymbol{x}^T = [x_1 \cdots x_a]$として

$$
\boldsymbol{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad (7.8)
$$

という形になる。(7.6)式も(7.8)式の特別な場合に過ぎない。(7.8)式がANPにおいて超行列$\boldsymbol{S}$から総合評価ベクトル$\boldsymbol{x}$を求めるための基本方程式である。これは、超行列$\boldsymbol{S}$の作用によって不変となるベクトル$\boldsymbol{x}$が総合評価を与えるというのがANP解析の基本原理であることを示している。なお(7.8)式で、$\boldsymbol{S}$をマルコフ過程の推移確率行列とみなしたとき、$\boldsymbol{x}$は極限分布に相当しているので、総合評価と極限分布が対応していることに気がつく。

また(7.8)式(あるいは(7.7)式)は$x_1, \cdots, x_n$に関する同次(定数項のない)連立一次方程式に過ぎないから普通の掃出法で解くことができる。また(7.8)式は$\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{S}$の、固有値1に対する固有ベクトルであるという見方もできるからパワー法のような固有ベクトル解法で求めることもできる。実際の計算では後者のほうがはるかに効率が良い。

7.3 基本方程式の解法

まず基本方程式(7.8)式は同次方程式だから、$\boldsymbol{x}$がその解であれば、その一定倍$a\boldsymbol{x}$もまたその解となる。しかしこの定数倍を除いて解が一意かどうかという問題が重要であるが、$\boldsymbol{S}$が既約であればの§7.1定理1がそれを保証してくれる。これを基本方程式の解という見方から言い換えた形で次の定理としてまとめておこう。

定理 4 基本方程式(7.8)の解$\boldsymbol{x}$は、$\boldsymbol{S}$が既約行列なら、定数倍を除いて一意に定まる。

つまり$\boldsymbol{S}$は最大固有値1をもち、それに対するただ一組の固有ベクトル$\boldsymbol{x}$が総合評価値を与える。(7.8)式を単なる連立一次方程式とみるとその解の一意性を示すことは容易ではないが、固有値問題として眺めると、定理1より、その一意性が保証されるのである。

(一般に単根でない固有値に対しては固有ベクトルは一意には定まらない。)

この定理から、超行列$\boldsymbol{S}$が既約でないと総合評価値が一意に定まる保証がないということがわかる。この点からも既約性の重要性がわかる。

例1 さて§6.1で述べた車の評価問題の例を解いてみよう。この超行列は§6.1の(6.2)式であって既約であるから、定理4でその解の一意性が保証されている(定数倍を除いてという断り書きは今後一々断らないことにする)。

これを(7.7)式のまま固有値問題として解く方法は後で述べることにして、ここでは、(7.4)式の形から直接方程式を解いてみよう。(7.5)式から$\boldsymbol{x}$を消去すると

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{V}\boldsymbol{y},\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{V})\boldsymbol{y} = 0 \tag{7.9}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{I}$は単位行列で、$\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$は§6.1表1,表2に示されているが、これらから

$$\boldsymbol{WV} = \begin{bmatrix} .637 & .582 & .105 \\ .105 & .109 & .637 \\ .258 & .309 & .258 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .634 & .250 & .400 \\ .192 & .250 & .200 \\ .174 & .500 & .400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.534 & 0.357 & 0.413 \\ 0.198 & 0.372 & 0.319 \\ 0.268 & 0.271 & 0.269 \end{bmatrix}$$

そこで(7.9)式は

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{WV})\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0.466 & -0.357 & -0.413 \\ -0.198 & 0.628 & -0.319 \\ -0.268 & -0.271 & 0.731 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

となるがこの方程式を掃出法で解くと、表1のようになるからここでy_3は任意の値がとれるのでこれをαとおくと解は$[y_1\, y_2\, y_3] = \alpha[1.681, 1.038, 1]$となる。和が1となるように基準化すると

$$[\, y_1\ y_2\ y_3\,] = [0.452, 0.279, 0.269] \tag{7.10}$$

これは車に対する総合評価値である。つまりA(アメリカ車)、E(ヨーロッパ車)、J(日本車)がそれぞれ0.452, 0.279, 0.269と評価されていることになる。また同じように評価基準の重要度$\boldsymbol{x}$も、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{y}$によって求められる。これを計算すると

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.634 & 0.250 & 0.400 \\ 0.192 & 0.250 & 0.200 \\ 0.174 & 0.500 & 0.400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.452 \\ 0.279 \\ 0.269 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.464 \\ 0.210 \\ 0.326 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

となりC(費用)、R(修理システム)、D(耐久性)がそれぞれ0.464, 0.210, 0.326の重要度をもつという結論になる。

表1: 掃き出し法による解

y_1	y_2	y_3	
0.466	−0.357	−0.413	0
−0.198	0.628	−0.319	0
−0.268	−0.271	0.731	0
1.000	−0.766	−0.886	0
0.000	0.476	−0.494	0
0.000	−0.476	0.494	0
1.000	0.000	−1.681	0
0.000	1.000	−1.038	0
0.000	0.000	0.000	0

以上のように基本方程式を同次連立一時方程式として解くこともできるが、もっと効率のよい方法としては基本方程式を固有値問題として解く方法である。これは定理2に裏付けられたものである。

定理 5 基本方程式(7.8)の解$\boldsymbol{x}$は、超行列$\boldsymbol{S}$が原始行列であれば、$\boldsymbol{S}$の最大固有値1に対する主固有ベクトルとして、パワー法によって求めることができる。

固有値問題は、連立一次方程式の解法より難しく計算も時間がかかるというのが、従来の常識であった。しかし最大固有値とそれに対する主固有ベクトルを求めるだけならパワー法を用いればずっと簡単になる。連立一次方程式の解法の手間は元数の3乗に比例するが、パワー法の1回の計算は2乗のオーダーである。繰り返し計算があるとは言え、多くの場合収束は極めて速い。

しかしパワー法が収束する条件は、最大固有値が単根であって、他の固有値の絶対値がその最大固有値より小さいことである。定理2は原始行列が丁度その条件をみたすことを示している。

しかし例1のように超行列が、既約であるが、原始でない場合は、定理3が示すように、絶対値が最大固有値に等しいような固有値が存在するので、パワー法による収束の保証はない。したがって直接パワー法を

適用することはできないが、幸いにして次のようなありがたい定理がある。

定理 6 超行列(確率行列)Sが既約であれば

$$S_\alpha = \alpha I + (1-\alpha)S \ (0 < \alpha < 1) \qquad (7.12)$$

は確率行列であって、原始行列となり、Sの主固有ベクトルとS_αのそれとは一致する。

さてこの定理を用いると、超行列Sが既約行列でありさえすれば、基本方程式(7.8)の解xを、Sを原始化した行列S_αの主固有ベクトルとして求めることができる。

以上をまとめると、ANPにおいて超行列Sが既約行列であるとき、それに対する総合評価xを求める方法は極めて簡単で次のようになる;

「Sを(7.12)式によって原始化してS_αを求める。S_αの主固有ベクトルxをパワー法で求めれば、それが総合評価ベクトルとなる。」 (7.13)

この方法を用いて、§6の例1を解いてみよう。Sは(6.2)式で与えられたものだから、これを$\alpha = 1/2$として、原始化すると

$$S_{1/2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .634 & .250 & .400 \\ 0 & 1 & 0 & .192 & .250 & .200 \\ 0 & 0 & 1 & .174 & .500 & .400 \\ .637 & .582 & .105 & 1 & 0 & 0 \\ .105 & .109 & .637 & 0 & 1 & 0 \\ .259 & .309 & .258 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.14)$$

となる。これに(初期値を$(1,1,1,1,1,1)\times 1/6$として)パワー法をほどこすと、わずか数ステップで収束して

$$x^T = [0.232\ 0.105\ 0.163\ 0.226\ 0.140\ 0.134] \qquad (7.15)$$

を得る。

これは全体が基準化されているが、例1で先に計算した(7.10)式、(7.11)式はクラスターごとに基準化したものである。したがって(7.15)を2倍したものが(7.11)式、(7.10)式の値となり、先の計算結果と一致する。

7.4 超行列が既約でない場合

§6.1の例2(図2)のように超行列が既約でない(対応するグラフが強連結でない)場合には、基本方程式(7.8)の解が必ずしも妥当なものとならない。この例を図1のようなANPで考えてみよう。対応する超行列は

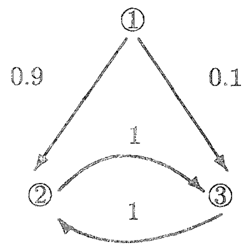

図 1: 強連結でないグラフ

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 1 \\ 0.1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

となるが、これに対する基本方程式の解は$x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 1$となる。これは①の②と③とに対する評価0.9と0.1が、$x_1 = 0$であるため、全く無視された結果となって明らかに不合理である。

一般に有向グラフが強連結でない場合、それを強連結成分に分けて考えるとき、inputのない成分とoutputのない成分が出てくる。図1では、2つの強連結成分$\mathbb{G}_1 = \{1\}$と$\mathbb{G}_2 = \{2,3\}$にわけられ、$\mathbb{G}_1$にはinputがなく、$\mathbb{G}_2$にはoutputがない。そこでこのような場合のoutputのない成分からinputのない成分への、仮想的評価を考え、全体を強連結なものに変換するものとする。

$\mathbb{G}_2$から$\mathbb{G}_1$への評価行列としては、パラメタ$\delta(0 < \delta < 1)$を用いて、$[\delta,\ \delta]$とし、全体として確率行列になるように$\mathbb{G}_2$内の評価行列を$\varepsilon(=1-\delta)$倍しておく。こうして変換された超行列$\tilde{S}$は

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \delta & \delta \\ 0.9 & 0 & \varepsilon \\ 0.1 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \ (\delta + \varepsilon = 1) \qquad (7.17)$$

となる。これに対する基本方程式の解は

$$x_1 = 1 - \varepsilon^2, x_2 = 0.9 + 0.1\varepsilon,\ x_3 = 0.1 + 0.9\varepsilon \qquad (7.18)$$

となる(比だけが問題だから和が1となる基準化は行っていない)。パラメタδ(あるいはε)をどのようにして選ぶかについては問題に応じて柔軟に考えていくのが良いと思う。

§6.1の例2の超行列を上と同じように変換すると、

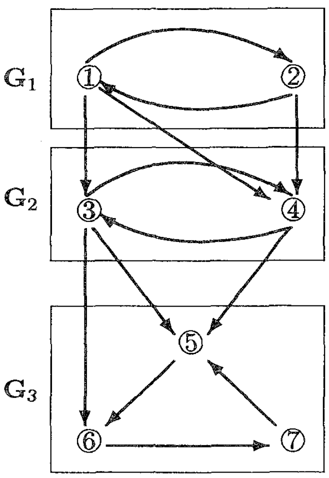

図 2: 一般のグラフ

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & \delta e & \delta e \\ \boldsymbol{u} & 0 & \varepsilon \boldsymbol{V} \\ 0 & \varepsilon \boldsymbol{W} & 0 \end{bmatrix} \quad (\delta + \varepsilon = 1) \qquad (7.19)$$

となる。eは要素がすべて1である1×3行列。「投」の総合評価をx_0、[品、広、サ]の総合評価ベクトルを$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$、(M,B,W)のそれを$\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$とすると、基本方程式は

$$\begin{aligned} \delta(x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3) &= x_0 \\ x_0 \boldsymbol{u} + \varepsilon \boldsymbol{V} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x} \\ \varepsilon \boldsymbol{W} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{y} \end{aligned} \qquad (7.20)$$

となり、その解は次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_0 (\boldsymbol{I} - \varepsilon^2 \boldsymbol{V}\boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \varepsilon x_0 \boldsymbol{W} (\boldsymbol{I} - \varepsilon^2 \boldsymbol{V}\boldsymbol{W})^{-1} \boldsymbol{u} \end{aligned} \qquad (7.21)$$

図2は一般的なパターンであるが、この場合、強連結成分G_1,G_2, G_3があるが、G_1にはinputがなく、G_3にはoutputがない。この場合の超行列は

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{W}_{21} & \boldsymbol{W}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{W}_{32} & \boldsymbol{W}_3 \end{bmatrix} \qquad (7.22)$$

となる。ここで$\boldsymbol{W}_1(\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{W}_3)$は$\mathrm{G}_1(\mathrm{G}_2,\mathrm{G}_3)$内の評価行列で、$\boldsymbol{W}_{21}(\boldsymbol{W}_{32})$は$\mathrm{G}_1$の$\mathrm{G}_2$ (G_2のG_3)に対する評価行列である。

この場合のG_1(G_2, G_3)の総合評価ベクトルを$\boldsymbol{x}_1$($\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$)とすると、基本方程式(7.8)の解は、$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = 0$で$\boldsymbol{x}_3$のみが非ゼロの解をもつことになる。そこで$\boldsymbol{S}$の変換行列$\widetilde{\boldsymbol{S}}$を

$$\widetilde{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_1 & 0 & (1/2)\delta \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{W}_{21} & \boldsymbol{W}_2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{W}_{32} & \varepsilon \boldsymbol{W}_3 \end{bmatrix} \quad (\delta + \varepsilon = 1) \qquad (7.23)$$

として、これに対する基本方程式の解を求めればよい。ここで$\boldsymbol{J}$は要素がすべて1である行列で1/2という係数はG_1の要素の数2の逆数である。

[注] Saaty氏の提案したANPの解法は、ここで述べたものとは少し異なっている。ここで氏の方法を紹介しておこう。

(i) 超行列$\boldsymbol{S}$が原始行列である場合

この場合$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{S}^r$が収束し、その極限行列の各列はすべて同一のベクトル$\boldsymbol{x}$となる。つまり

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{S}^r = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}]$$

となることを示し、この$\boldsymbol{x}$が総合評価となるというのがSaaty法である。この$\boldsymbol{x}$は我々の基本方程式(7.8)の解となる。

(ii) 超行列$\boldsymbol{S}$が既約行列である(が原始でない)場合

この場合$\boldsymbol{S}^r$はrによって周期的に変動して収束しない。しかし$\boldsymbol{S}$の周期をc(§6)とすると、$\boldsymbol{S}^c$はその累乗が収束する。つまり$\lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{S}^c)^r$を解法の根拠とする。

簡単の為2つのクラスターからなっていて互いに他を評価する場合、つまり$\boldsymbol{S}$が(7.3)式の形をしている場合を考えよう。この場合

$$\boldsymbol{S}^2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}\boldsymbol{W} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} \end{bmatrix}$$

となり

$$\lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{S}^2)^r = \begin{bmatrix} \lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{V}\boldsymbol{W})^r & 0 \\ 0 & \lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{W}\boldsymbol{V})^r \end{bmatrix}$$

において、右辺のそれぞれの成分が収束し

$$\lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{V}\boldsymbol{W})^r = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{x}]$$

$$\lim_{r\to\infty} (\boldsymbol{W}\boldsymbol{V})^r = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{y}]$$

となって、ベクトル$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$がそれぞれ第一クラスター、第二クラスターの総合評価となるというのが、Saaty氏の方法である。じつはこれらが、我々の(7.5)式(あるいは(7.6)式)の解$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$と一致することも(i)の場合と同様である。