コンピュータシステム

紀　一誠

1. はじめに

コンピュータシステムは，さまざまなシステム資源から構成されている．その設計・開発においては，システムにかかる負荷を的確に把握すること，またシステム資源の競合状況を的確に把握し，システム性能を精度良く，また効率的に評価する技術が求められる．本稿では，その目的に沿う一つの技術である待ち行列を用いたモデル化と評価技術の概要を紹介する．この分野においては，積形式解をもつ待ち行列網が応用の中核をなしている．次章にその簡単な紹介をおこなう．本稿では，すでに実用に供されている積形式解を第一形式，その拡張形を第二形式として紹介する．サービス時間分布はすべて指数分布を仮定した．第3章には，応用例の紹介をおこなう．はじめに，第一形式網の応用を述べ，次いで第二形式網の応用を述べる．さらに，最近の話題として，2層型待ち行列網とその応用についての話題を紹介する．

2. 待ち行列ネットワーク

2.1 モデルと記号

客の移動経路: $1, 2, \cdots, N$ と番号付けられた N ノードから構成される待ち行列網を考える．ここで，ノードとは，サービスを行うサーバとそれを待つための待ち行列から構成される一つの待ち行列システムを指す．これらのノード間を推移する客の移動経路は M 種類あるものとし，その移動経路のことを部分連鎖という．すなわち，部分連鎖 j に属する客は，ノード h でのサービスが終了した後，確率 $p^{(j)}_{(h,k)}$ でノード k に移動する．

きの　いっせい　ＮＥＣ　Ｃ＆Ｃメディア研究所
〒 216-8555 川崎市宮前区宮崎 4-1-1

部分連鎖には開放型と閉鎖型の2種類がある．開放型とは，網外から客が到着し，網外に退去する経路であり，閉鎖型とは，常にある一定人数の客が網内を移動し，網外への退去や網外からの到着が無い経路をいう．開放型部分連鎖と閉鎖型部分連鎖が混在するような網を混合型待ち行列網という．混合型待ち行列網の例を図1に示す．網外を便宜的にノード番号0と考えることにする．開放型部分連鎖 j に属する客が網に到着した時には確率 $p^{(j)}_{(0,h)}$ でノード h を選択し，またノード h でサービスを終了した客は網外に確率 $p^{(j)}_{(h,0)}$ で退去する．ただし，$h = 0, 1, \ldots N$ について $\sum_{k=0}^{N} p^{(j)}_{(h,k)} = 1$ とする．このとき，開放型部分連鎖 j に属する客の網内移動経路は次の推移確率行列をもつマルコフ連鎖になる．

$$(1) \qquad P_j = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & p^{(j)}_{(0,1)} & \cdots & p^{(j)}_{(0,N)} \\ \hline p^{(j)}_{(1,0)} & p^{(j)}_{(1,1)} & \cdots & p^{(j)}_{(1,N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(j)}_{(N,0)} & p^{(j)}_{(N,1)} & \cdots & p^{(j)}_{(N,N)} \end{array}\right)$$

部分連鎖 j が閉鎖型の場合には，$h = 0, 1, \ldots, N$ について $p^{(j)}_{(0,h)} = p^{(j)}_{(h,0)} = 0$ とし，

$$(2) \qquad P_j = \begin{pmatrix} p^{(j)}_{(1,1)} & \cdots & p^{(j)}_{(1,N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p^{(j)}_{(N,1)} & \cdots & p^{(j)}_{(N,N)} \end{pmatrix}$$

と考える．

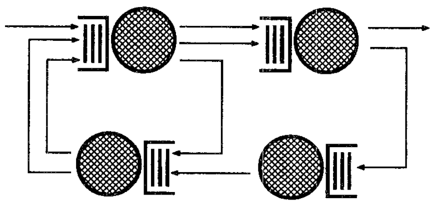

図 1: 混合型待ち行列網（開放型部分連鎖：1， 閉鎖型部分連鎖：2）

サービス要求時間とサービス率：ノード i においては，どの部分連鎖に属する客も，サービス要求時間 S_i をもつものとし，確率変数 S_i はパラメータ μ_i をもつ指数分布にしたがうとする．すなわち，$P(S_i \le t) = 1 - e^{-\mu t}$，$E(S_i) = 1/\mu_i$．また，サービス規律はすべてのノードについて先着順（FIFO）とする．各ノードのサーバのサービス能力は，そのノードに滞在する客数に依存してきまるものとし，ノード i の滞在客数が n 人の場合のサービス率（人/時間）を $\gamma_i(n)$ とする．$\gamma_i(n)$ の形を次のように選べば複数サーバ（C_i）のノードを表すことができる．

$$\gamma_i(n) = \begin{cases} n\gamma_i(1), & n \le C_i \\ C_i\gamma_i(1), & C_i \le n . \end{cases}$$

ここで，ノード i に関するサービスポテンシャル関数 $\Phi_i(n)$ を次のように定義する．

(3) $$\Phi_i(n) = \{\prod_{k=1}^{n} \gamma_i(k)\}^{-1}, \quad \Phi_i(0) = 1 .$$

用語「ポテンシャル」の意味は，次より明らかであろう．

(4) $$\gamma_i(n) = \frac{\Phi_i(n-1)}{\Phi_i(n)} .$$

到着率と到着ポテンシャル関数：開放型部分連鎖 j に属する客は，網内に滞在する連鎖 j に属する総客数 m_j に依存する到着率 $\lambda_j(m_j)$ をもつポアソン到着過程にしたがい網外から到着する．サービスポテンシャル関数と同様に，連鎖 j に関する到着ポテンシャル関数 $\Lambda_j(m)$ を定義する．

(5) $$\Lambda_j(m) = \prod_{k=0}^{m-1} \lambda_j(k), \quad \Lambda_j(0) = \lambda_j(0) .$$

用語「ポテンシャル」は，次のことから自然であろう．

(6) $$\lambda_j(m) = \frac{\Lambda_j(m+1)}{\Lambda_j(m)} .$$

到着率が網内客数に依らず一定値 λ_j をとる場合には，$\Lambda_j(m) = \lambda_j^m$ となる． また，部分連鎖 j が網内客数が K_j である閉鎖型の場合には，

(7) $$\Lambda_j(m) = \begin{cases} 1, & m = K_j \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．

記号の定義：待ち行列網の積形式解を簡単に表現するためには，ベクトル表現に関するいくつかの定義をしておくと大変に便利であるため，ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ および $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ について，次のような定義をする．

$$\|\boldsymbol{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + \cdots + x_n ,$$
$$\boldsymbol{x}! \stackrel{\text{def}}{=} x_1!x_2!\ldots x_n! , \quad \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_1^{x_1}\rho_2^{x_2}\ldots\rho_n^{x_n}$$

さらに，$I_N = \{1, 2, \ldots N\}$ とする．

網の状態表現：$x_{i,j}$ を，ノード i に滞在する部分連鎖 j に属する客の数とし，ノード i の状態を表すベクトルを，$\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,M})$，ネットワーク全体の状態を表すベクトルを，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_N)$ とする．また，部分連鎖 j に属する客の網内滞在数を，m_j とし，部分連鎖に関する網内客数ベクトルを，$\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_M)$ とする．このとき，$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_N$ である．また，ノード i に滞在する総客数 $n_i (= \|\boldsymbol{x}_i\|)$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ とする．

さらに，本稿では混乱のない限り，確率変数とその変数がとる値を同じ記号で表現するものとする．すなわち，$P(x)$ は確率変数 x がある値 x をとる確率とする．

2.2 トラヒック方程式とトラヒック密度

部分連鎖 $j \in I_M$ について，その網内移動経路はマルコフ連鎖であることは先に述べたが，その移動経路行列を係数とする連立方程式をトラヒック方程式という．すなわち，$\Theta_j = (\theta_{1,j}, \theta_{2,j}, \ldots, \theta_{N,j})$ とし，

(8a) $$(1, \Theta_j) = (1, \Theta_j)P_j \quad \text{（開放型部分連鎖）}$$

(8b) $$\Theta_j = \Theta_j P_j \quad \text{（閉鎖型部分連鎖）}$$

の形をした方程式をトラヒック方程式という．以下はこれらの方程式が解をもつ場合について考える．方程式 (8a) の解 $\theta_{i,j}$ は，連鎖 j の客 のノード i への（相対）到着率を表しており，網外からの到着率が一定値 λ_j の場合には，ノード i への連鎖 j の客の到着率（内部，外部合わせたもの）は，$\lambda_j\theta_{i,j}$ となる．また，方程式 (8b) は同次方程式なので，定数倍を除き解が定まり，その解 $\theta_{i,j}$ は連鎖 j の客のノード i への相対訪問回数を表している．すなわち，$\theta_{1,j} = 1$ とした場合には，$\theta_{i,j}$ は，連鎖 j の客がノード 1 を出発したから次に再びノード 1 に戻るまでの間にノード i を訪問する平均訪問回数を表している．トラヒック方程式の解として得られる相対訪問回数を用いてトラヒック密度が，$i \in I_N$，$j \in I_M$ について次の形に定義される．

$$\rho_{i,j} = \frac{\theta_{i,j}}{\mu_i} .$$

ノード $i(\in I_N)$ に関するトラヒック密度ベクトルを，$\boldsymbol{\rho}_i=(\rho_{i,1},\rho_{i,2},\ldots,\rho_{i,M})$ とする．

2.3 積形式解

第一形式： 待ち行列網の状態が $\boldsymbol{x}$ である同時確率は，次のような積形式に得られることが知られている．

$$P(\boldsymbol{x})=C\prod_{j=1}^{M}\Lambda_j(m_j)\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(\|\boldsymbol{x}_i\|)\prod_{i=1}^{N}\pi_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{9}$$

ここで，$i\in I_N$ について，

$$\pi_i(\boldsymbol{x}_i)=\frac{\|\boldsymbol{x}_i\|!}{\boldsymbol{x}_i!}\boldsymbol{\rho}_i^{\boldsymbol{x}_i} \tag{10}$$

であり，C は $\boldsymbol{x}$ がとり得るすべての状態について確率 (9) の和が 1 となることから得られる正規化定数とする．

とくに，総ての部分連鎖が閉鎖型である場合には，

$$P(\boldsymbol{x})=\frac{1}{G(\boldsymbol{K})}\prod_{i=1}^{N}q_i(\boldsymbol{x}_i)\,, \tag{11}$$

$$q_i(\boldsymbol{x}_i)=\Phi_i(\|\boldsymbol{x}_i\|)\pi_i(\boldsymbol{x}_i)$$

となる．ここで，K_j を連鎖 j の網内客数，網内客数ベクトルを $\boldsymbol{K}=(K_1,K_2,\ldots,K_M)$ とする．$G(\boldsymbol{K})$ は次の形に定まる正規化定数である．

$$G(\boldsymbol{K})=\sum_{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{K}}\prod_{i=1}^{N}q_i(\boldsymbol{x}_i)\,. \tag{12}$$

この正規化定数をいかに効率よく計算するかが待ち行列網モデルの応用に際しては重要な問題となる．その計算法としては，以下のようなたたみこみ演算によるものが一般的である．すなわち，q_1,q_2 を例にとり，たたみこみ演算を，

$$(q_1*q_2)(\boldsymbol{K})=\sum_{\boldsymbol{0}\le\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{K}}q_1(\boldsymbol{x})q_2(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{x})$$

と定義すると，正規化定数は次の演算により得られる．

$$G(\boldsymbol{K})=(q_1*q_2*\cdots*q_N)(\boldsymbol{K})\,. \tag{13}$$

本稿では，積形式解 (9) を第一形式ということにする．この第一形式の積形式解をもつ待ち行列網は，BCMP 網といわれ広く応用に用いられている．また，この種の網の内，1 連鎖のみをもつ網は Jackson 網といわれている．

第二形式： 第一形式の積形式解をもつ網を以下のように拡張する．網全体に関するサービスポテンシャル関数と到着ポテンシャル関数を，正実関数 $\Phi(\boldsymbol{n})$，非負実関数 $\Lambda(\boldsymbol{m})$ とする．第一形式の網では，これらはベクトルの各要素を変数とする関数の積形式，すなわち，

$$\Phi(\boldsymbol{n})=\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(\|\boldsymbol{x}_i\|)\ \left(=\prod_{i=1}^{N}\Phi_i(n_i)\right), \tag{14}$$

$$\Lambda(\boldsymbol{m})=\prod_{j=1}^{M}\Lambda_j(m_j) \tag{15}$$

の形をとっていた．しかし，これらのポテンシャル関数が積形式にはならない場合にも網の状態の同時確率が積形式に得られる場合がある．第 2.1 節に示したモデルでは，ノード i におけるサービス率はそのノードに滞在する客数に依存し，ポテンシャル関数から (4) の形に得られた．この関係を拡張し，ノード i のサービス率はそのノードに滞在する客数のみならず，網全体について各ノードの滞在客数，すなわち，$\boldsymbol{n}$ に依存するものとし，網の状態が $\boldsymbol{n}$ であるときのノード i のサービス率 $\gamma_i(\boldsymbol{n})$ はポテンシャル関数を介して，

$$\gamma_i(\boldsymbol{n})=\frac{\Phi(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_i)}{\Phi(\boldsymbol{n})} \tag{16}$$

の形に与えられるものとする．また，連鎖 j に属する客の到着率も第 2.1 節のモデルでは，その連鎖に属する網内客数に依存してポテンシャル関数から (6) の形に得られた．この関係を拡張し，連鎖 j の客の到着率は網全体の状態 $\boldsymbol{m}$ に依存し，ポテンシャル関数を介して，

$$\lambda_j(\boldsymbol{m})=\frac{\Lambda(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{e}_j)}{\Lambda(\boldsymbol{m})} \tag{17}$$

と与えられるものとする．ここで，関係式 (16), (17) において，$\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ はそれぞれ i, j 方向の単位ベクトルとする．このとき，待ち行列網の状態が $\boldsymbol{x}$ である同時確率は次の形に与えられる．

$$P(\boldsymbol{x})=C\Lambda(\boldsymbol{m})\Phi(\boldsymbol{n})\prod_{i=1}^{N}\pi_i(\boldsymbol{x}_i)\,. \tag{18}$$

積形式解 (18) を本稿では第二形式の積形式解ということにする．

3. システム性能評価への応用

3.1 セントラルサーバモデル

待ち行列網モデルをコンピュータシステムの性能評価に応用した最初のモデルは，図 3.1 に示されるようなセントラルサーバモデルといわれるものであった．このモ

デルでは，ノードはCPU, DISKといったハードウエア資源に対応付けられ，性質の異なるサブシステム（例えば，バッチサブシステムとオンラインサブシステム）が部分連鎖に対応付けられている．このモデルの拠り所となっているのは，第一形式の積形式解である．ポテンシャル関数が(14)のような積形式になり，その結果，正規化定数がたたみこみ演算(13)により効率良く計算できる．また，応用に際しては，開放型，閉鎖型の部分連鎖の混在する混合型の待ち行列網モデルが利用できるようになった事がその適用範囲を大きく広げる事になった．実用化に際しては，コンピュータの世界と待ち行列網モデルとの間をとりもつ使いやすいインターフェイスと，様々な性能評価指標を高速に計算するための計算エンジンが必要となる．このため，実用化を目指し，様々な工夫を凝らした性能評価パッケージが開発され，製品化されてきた．コンピュータの世界が，汎用機の時代からオープンシステムの時代に推移するに従い，その流れに沿った改良，改善が行われてきているが，待ち行列網モデルの応用という視点から見れば第一形式の積形式解をもつモデルの範囲に留まっていると言えよう．

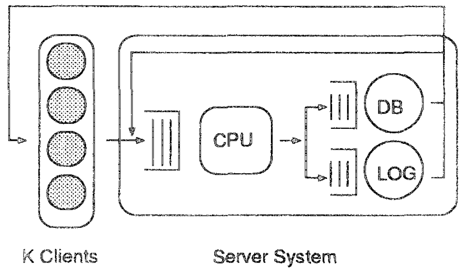

図2: セントラルサーバモデル

3.2 回線交換モデル

第二形式の積形式網モデルの応用として，次のような例をあげることができる．図3に示すように，各々 $S_1, S_2, \ldots, S_M$ 本の回線容量をもつ交換機に，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M$ の発生率をもつPoisson到着過程にしたがい接続要求が発生するとする．接続要求はまず，その交換機に空き回線がある場合にはそれを確保し，さらに，各交換機の先にある共通の交換機0（S_0 本の回線容量をもつ）に接続要求をし，空き回線がある場合にはそれを確保する．交換機 S_0 に空き回線が無い場合には，たとえ前段の交換機で回線が確保できていたとしても呼損になる．接続呼の回線保留時間は一般分布とし，その平均保留時間は，方路 $i \in I_M$ について，$1/\mu_i$ とする．$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_M)$，交換機 i の接続回線数を x_i，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_M)$，$\rho_i = \lambda_i/\mu_i$，$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_M)$ とする．このとき，状態 $\boldsymbol{x}$ に関する定常状態確率は次のような積形式に表現できる．

$$P(\boldsymbol{x}) = C\Lambda(\boldsymbol{x})\frac{\boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}!} . \tag{19}$$

ここで，C は正規化定数，$\Lambda(\boldsymbol{x})$ は，

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in H \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \tag{20}$$

の形をした全体の状態に依存する到着ポテンシャル関数である．ただし，

$$H = \{\, \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} < \boldsymbol{S},\ \|\boldsymbol{x}\| < S_0 \} . \tag{21}$$

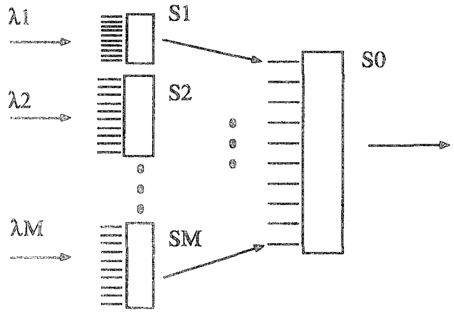

図3: 回線交換モデル

3.3 2層型待ち行列網

第3.1節に示したセントラルサーバモデルでは，競合を発生するシステム資源としてハードウエア資源を考えていた．しかし，実際のシステムにおいては，ハードウエア資源のみならず，ソフトウエア資源による競合も性能に大きく影響している．しかし，ソフトウエア資源とハードウエア資源は同種の競合資源とみなすことはできず，両者の保留関係を的確にとらえたモデル化が必要とされる．このため，従来の待ち行列網モデルを2層に重ねたような，2層型待ち行列網（Two-layer Queueing Networks）が提案されている[2]．2層型待ち行列網モデルは，図4に示されるように，上位層（Upper layer）と下位層（Lower layer）から構成される．上位層を構成するノードをステーション，下位層を構成するノードをキューとよぶことにする．上位層における客の移動

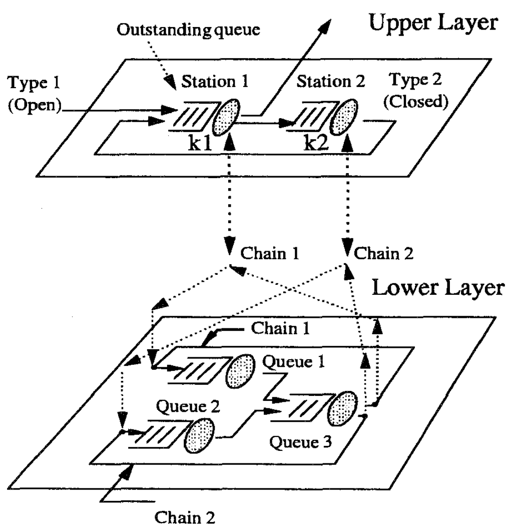

図 4: ２層型待ち行列網モデル

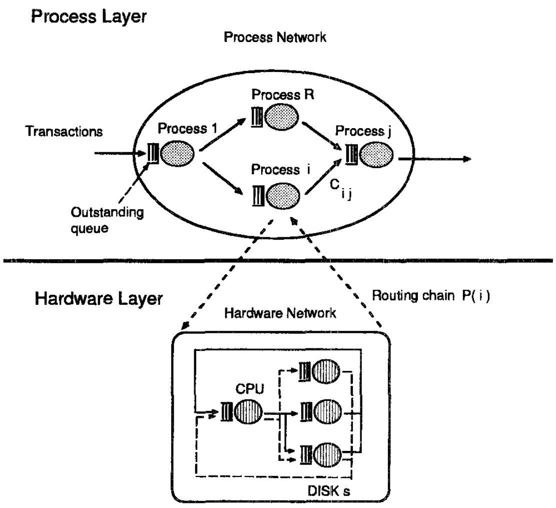

図 5: プロセス競合モデル

経路は混合型であって良く，その部分連鎖をタイプとよぶ．ステーション i のサーバ数は一般に，$k_i(\geq 1)$ であり，到着客は滞在客数（自分を含め）がサーバ数以下なら直ちに下位層に移動する．下位層では，上位層のステーションに対応した部分連鎖にしたがいキュー間を移動し，再び上位層の同じステーションに戻ってくる．客が下位層に移動してから再び上位層に戻るまでの時間は，出発元となった上位層のステーションにおけるサービス時間とみなされ，サーバは他の客のサービスは行えない．その結果，サーバ数 k_i をもつステーション i からは，最大 k_i 人しか下位層に入ることができない．滞在客数 k_i に出合った客は，サーバが空くまでアウトスタンデイングキュー（outstanding queue）といわれる待ち行列中で待つ．このモデルの応用例としては，以下のようなものが考えられている．

プロセス競合モデル: コンピュータシステムでは，トランザクションの処理を行うためにはまずプロセスというソフトウエア資源の割り当てが行われる．CPU をはじめとするハードウエア資源の割り当ては，このプロセスを対象として行われるため，プロセスの割り当てを受けられないトランザクションは，たとえハードウエア資源に余裕があってもその割り当てを受けることはできない．システム設計においては，全体性能の向上のため，プロセス割り当てを無制限に行うのではなく，図５のように，性格の異なる処理毎に割り当てるプロセス数に制限を設けることがある． このとき，割り当てプロセス数を適切にしないと，ハードウエア資源に余裕があるにもかかわらず，プロセスが隘路となり性能が出ない場合や，一部のプロセスのみが割り当てを受けやすくなる，等々の問題が発生する．

設備共用モデル: 一つの設備を二種類の作業で共用するモデルを考える．作業１，２は各々到着率 λ_1, λ_2 のポアソン過程にしたがい到着する．作業者は共用の設備を用いて作業をする．設備の使用時間はどちらの作業についても平均 $1/\mu$ の指数分布にしたがうものとし，サービス規律は先着順とする．作業１には２人，作業１には１人の作業員が当たる．このようなモデルは，図６のように，共用される設備を下位層のキュー，作業１，２を上位層の二つのステーション１，２に対応付けることにより，２層型待ち行列網を用いてモデル化できる．

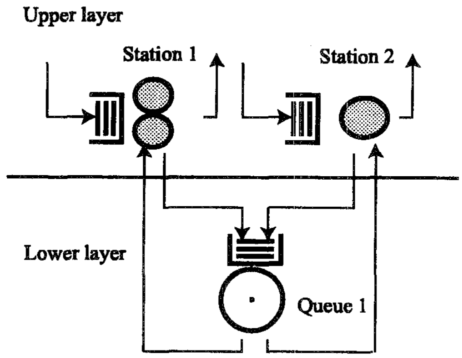

図 6: 設備共用モデル

分解近似法: 上位層のステーションがすべて無限サーバの場合には，２層型待ち行列網モデルは積形式解をもつが，それ以外の場合には積形式解は得られないことが

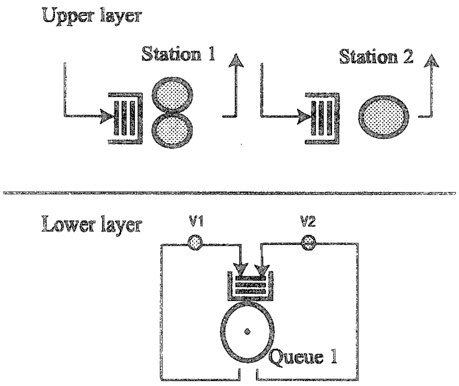

図 7: 分解近似法

知られている．この場合には，何らかの近似解法を考えなければならない．ここでは，上位層と下位層を分解する形の近似法を，設備共用モデルを例にとり紹介する．図 7 に示されるように，下位層は，客数 $(k_1, k_2)\,(=\boldsymbol{k})$ をもつ閉鎖型２連鎖網とし，サービス時間０の仮想ノード V1, V2 を単位時間に通過する客数（スループット）を，$\tau_1(k_1,k_2)$，$\tau_2(k_1,k_2)$，また，$\nu_1 = \nu_2 = 1/\mu$ とすると，

$$P(k_1,k_2) = \frac{1}{G(k_1,k_2)} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!} \nu_1^{k_1} \nu_2^{k_2} = 1 \tag{22}$$

より，$G(k_1,k_2) = (\|\boldsymbol{k}\|!/\boldsymbol{k}!)\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}$，となり，$k_1 \geq 1$ について，

$$\tau_1(k_1,k_2) = \frac{G(k_1-1,k_2)}{G(k_1,k_2)} = \frac{1}{\nu_1}\frac{k_1}{k_1+k_2}\,, \tag{23}$$

$\tau_1(0,k_2) = 0$ となる．$\tau_2(k_1,k_2)$ についても同様な関係が得られる．上位層は２連鎖からなる開放型待ち行列網と考える．ステーション１，２の滞在客数を，$(n_1,n_2)\,(=\boldsymbol{n})$ とする．本モデルでは，$\Lambda(\boldsymbol{m}) = \Lambda(n_1,n_2) = \lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}$ となる．各ステーションにおけるサービス率は，そのステーションの滞在客数のみならず，他のステーションの滞在客数に依存して変化する．分解近似法は，上位層に第二形式の積形式網モデルを仮定し，この依存関係をみたすようなサービスポテンシャル関数 $\Phi(\boldsymbol{n})$ を近似的に定めようとするものである．ステーション 1, 2 における平均サービス要求時間を，$\mu_1 = \mu_2 = 1$ とし，$\rho_1 = \lambda_1/\mu_1$，$\rho_2 = \lambda_2/\mu_2$ とする．このとき，上位層の状態確率を次の形に仮定する．

$$P(\boldsymbol{n}) = C\Phi(\boldsymbol{n})\rho_1^{n_1}\rho_2^{n_2} \tag{24}$$

このとき，ステーション i のサービス率は $\boldsymbol{n}$ に依存し，

$$\gamma_i(\boldsymbol{n}) = \frac{\Phi(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{e}_i)}{\Phi(\boldsymbol{n})}\,, \quad i = 1,2 \tag{25}$$

とする．上位層の状態が，$\boldsymbol{n}$ のとき，下位層に滞在する客数 (k_1,k_2) は，$k_1 = \min(n_1,2)$, $k_2 = \min(n_2,1)$ である．このとき，ステーション i のサービス率は各連鎖のスループット $\tau_i(\boldsymbol{k})$ に等しいと考える．すなわち，

$$\gamma_i(\boldsymbol{n}) = \tau_i(\boldsymbol{k})\,, \quad i = 1,2 \tag{26}$$

と考え，この関係を満足するポテンシャル関数 $\Phi(\boldsymbol{n})$ を関係式 (25) を通じて求めようとするものである．しかしながら，すべての $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}$ について，(25), (26) を満たすような $\Phi(\boldsymbol{n})$ を一意に決めることは残念ながらできない．それは，次の例から明らかであろう．$\Phi(2,2)$ を求めるのに，$\Phi(1,1)$ から，$(1,1) \to (2,1) \to (2,2)$ のルートで計算すると，$\gamma_1(2,1) = \tau_1(2,1) = \Phi(1,1)/\Phi(2,1)$ および $\gamma_2(2,2) = \tau_2(2,1) = \Phi(2,1)/\Phi(2,2)$ より，

$$\Phi(2,2) \Leftarrow \frac{\Phi(1,1)}{\tau_1(2,1)\tau_2(2,1)}$$

となるが，$(1,1) \to (1,2) \to (2,2)$ のルートで求めると，

$$\Phi(2,2) \Leftarrow \frac{\Phi(1,1)}{\tau_1(2,1)\tau_2(1,1)}$$

となり，ルートによりポテンシャル関数の値が異なってしまう．ルートの決定法は今後の研究による．

4. おわりに

コンピュータシステムにおける待ち行列モデルの利用の歴史は，通信関係の分野に比べるとまだ浅い．また，この分野は技術革新が速いため，設計技術を支援すべき理論やモデルが追いついていない，という正直な実感がある．また，この分野には，従来の応用分野には現れなかった形の競合問題，混雑問題が多数存在している．現実世界から要求される性能評価の当面の要請に応えられる努力とともに，このような基本問題の解決にむけた努力も続けられるべきものであろう．本稿は，サーベイを目的としたものではないので，文献は [1] を補完資料として頂きたい．

参考文献

[1] 紀一誠：情報処理システムの性能評価 (1)/(2)/(3), オペレーションズ・リサーチ, Vol. 40 (1995), 315–320/370–375/431–436.

[2] Kino, I.: Two-layer Queueing Networks, *JORSJ*, Vol. 40 (1997), 163–185.