講座

AHPからANPへの諸問題 IV

高橋　磐郎

6. ANP (Analytic Network Process) とは

AHPの特徴は、一対比較の情報に基づいて固有ベクトル法を用いて各対象の評価値を推定するという面と、いくつかの評価基準の下での評価値と統合化するという階層構造にあった。Saaty氏の提案するANPというのは、簡単に言うと後者の階層構造をネットワーク構造に拡張したものであるといえる。

Saaty氏はこのネットワーク構造の解析の基本として、超行列(Super Matrix)と呼ばれる行列を導入し、その行列としての性質、既約性や原始性、を利用して解析法を確立した。興味深いことに、この超行列はマルコフ過程の解析の基本となる推移行列に似ていて、ANPの解析はマルコフ過程の解析に似た特徴を持つことである。

はじめに簡単な例を通してその特徴をつかもう。

6.1 ANPの例とその超行列

例1 アメリカでの例だが、車の評価をするのに、代替案に相当するものとして、アメリカ車(A)、ヨーロッパ車(E)、日本車(J)を考え、評価基準に相当するものとしてコスト(C)、修理システム(R)、耐久性(D)を考える。

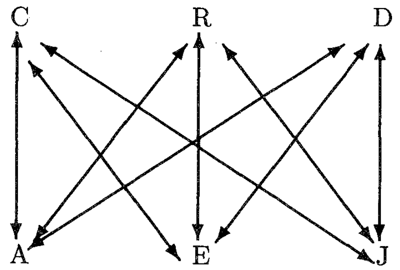

図1: 車の評価のグラフ

普通のAHPのような各評価基準に対する車の評価として表1が得られた。今後C,R,Dに対する評価値を列ベクトルとして並べてできる行列$\boldsymbol{W}$(表1)を評価基準(C,R,D)の代替案(A,E,J)に対する評価行列と呼ぶ。

たかはし　いわろう　日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

表1: 評価基準からの評価

C	A	E	J	評価値
A	1	5	3	0.637
E	1/5	1	1/3	0.105
J	1/3	3	1	0.258

R	A	E	J	評価値
A	1	5	2	0.582
E	1/5	1	1/3	0.109
J	1/2	3	1	0.309

D	A	E	J	評価値
A	1	1/5	1/3	0.105
E	5	1	3	0.637
J	3	1/3	1	0.258

$$\boldsymbol{W} = \begin{array}{c} \\ A \\ E \\ J \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & R & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.637 & 0.582 & 0.105 \\ 0.105 & 0.109 & 0.637 \\ 0.258 & 0.309 & 0.258 \end{bmatrix} \end{array}$$

しかしこれと同時に、各車から見たとき、CやRやDはどの程度重要かという見方もできる。

アメリカ車(A)からみたとき、C,R,Dはそれぞれどの程度重要かが表2(a)、ヨーロッパ車(E)からみたとき、C,R,Dの重要度が表2(b)、日本車(J)からみたときのものが、表2(c)である。これは各代替案から評価基準の重要度を評価したもので、この評価行列を$\boldsymbol{V}$としておこう。

表 2: 代替案からの評価

(a)

A	C	R	D	評価値
C	1	3	4	0.634
R	1/3	1	1	0.192
D	1/4	1	1	0.174

(b)

E	C	R	D	評価値
C	1	1	1/2	0.250
R	1	1	1/2	0.250
D	2	2	1	0.500

(c)

J	C	R	D	評価値
C	1	2	1	0.400
R	1/2	1	1/2	0.200
D	1	1/2	1	0.400

$$\boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{D} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.634 & 0.250 & 0.400 \\ 0.192 & 0.250 & 0.200 \\ 0.174 & 0.500 & 0.400 \end{bmatrix} \end{array}$$

このときこのANPに対する超行列$\boldsymbol{S}$を

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{W} & 0 \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

と定義する。

$\boldsymbol{W}$も$\boldsymbol{V}$もその各列で要素の和は1であるから、$\boldsymbol{S}$の各列で要素の和は1である。各要素が非負で、その各列で要素の和が1である行列を確率行列というが、$\boldsymbol{S}$は確率行列となることがわかる。この例に対する超行列は次の(6.2)式のようになる。

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{R} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{J} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{C} & \mathrm{R} & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{J} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & .634 & .250 & .400 \\ 0 & 0 & 0 & .192 & .250 & .200 \\ 0 & 0 & 0 & .174 & .500 & .400 \\ .637 & .582 & .105 & 0 & 0 & 0 \\ .105 & .109 & .637 & 0 & 0 & 0 \\ .259 & .309 & .258 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6.2)$$

例2 もう一つの例をあげてみよう。やはりアメリカの例であるが、ある投資家(個人にしろ、機関にしろ)がファーストフード産業への投資を考え、マクドナルド(M),バーガーキング(B),ウェンディ(W)を選び、これを評価してその評価値に比例した額を投資しようというわけである。

評価基準としては品質、広告、サービスを取り上げ、これらからのM,B,Wの各評価値を評価行列$\boldsymbol{W}$として

$$\boldsymbol{W} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{W} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{品} & \text{広} & \text{サ} \end{array} \\ \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \sum_i w_{ij} = 1 \qquad (6.3)$$

を得たとする。

一方ファーストフード各社は、品質、広告、サービスの各々にどのようなウェイトを置いて経営しているかという点を調査した結果から、次の評価行列$\boldsymbol{V}$が得られた。

$$\boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \\ \text{品} \\ \text{広} \\ \text{サ} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{M} & \mathrm{B} & \mathrm{W} \end{array} \\ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix} \end{array}, \quad \sum_i v_{ij} = 1 \qquad (6.4)$$

つまりは、Mは品質にv_{11}、広告にv_{21}、サービスにv_{31}のウェイトをおいて経営していることになる。B,Wについても同様である。

ANPでは、評価基準間の関連構造が重要なのであって、上記のw_{ij}やv_{ij}の値が一対比較によって得られたものか、直接調査によって選られたものかなどはもはや問題とせず、w_{ij}やv_{ij}の値は与えられたものとして出発することを注意しておこう。

さてまたもう一方において投資家自身が、ファーストフード産業においては品質、広告、サービスのどれがどの程度重要かという見解をさまざまな調査から得ているとする。これらをそれぞれu_1,u_2,u_3としよう。つまり投資家の評価基準に対する評価行列(ベクトル)は

$$\boldsymbol{u} = \begin{array}{c} \text{品} \\ \text{広} \\ \text{サ} \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \sum_i u_i = 1 \qquad (6.5)$$

となる。この問題に対する超行列は

$$\boldsymbol{S} \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{u} & 0 & \boldsymbol{V} \\ 0 & \boldsymbol{W} & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ 0 & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{21} & w_{22} & w_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{31} & w_{32} & w_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.6}
$$

となる。この場合も当然Sは確率行列としての性質を持っている。

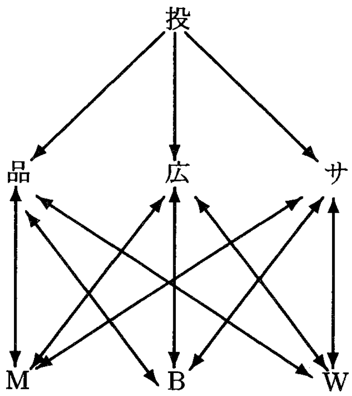

図 2: (a) ファーストフード問題

又この評価関連の構造を図示すると図2(a)のようなネットワークが得られる。これを簡略化して図2(b)のように書くことも多い。

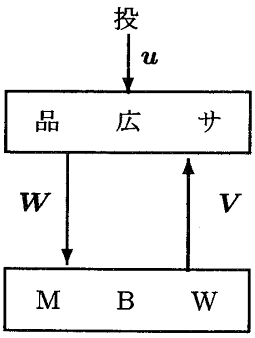

図 2: (b) ファーストフード問題

6.2　相互評価問題とANP

AHPでは、評価基準がいくつかあって、その各々が各代替案にどのようなウェイトを与えるかということが問題となる。つまり評価基準が代替案を評価するというように、評価するもの(評価者)と評価される者(被評価者)がはっきりと区別されている。

しかしANPとなると代替案自身が評価基準の重要度を評価するというフィードバック過程が入ってくるので、評価者と被評価者の区別は固定したものでなくなってくる。このようなシステムを相互評価システムと呼ぼう。

相互評価問題の典型は、美人コンテストのような場合に現れる。何人かの審査員が何人かの女性の美を審査することになるが、たとえば下位にランクされた女性が「私は美人なのだけど、審査員の審美眼が欠けているために高く評価されないのだ」というクレームをつけたとする。

そこでマネージャーは参加女性自身が審査員の審美眼を審査するというシステムを作れば公平だと考えるとする。a人の審査員、b人の女性に対するこのシステムは図3のような図1のANPと同じネットワークのパターンとなる。

このような問題は、体操競技や飛び込みやシンクロナイズスウィミングなど多くのスポーツゲームの評価に現れる。

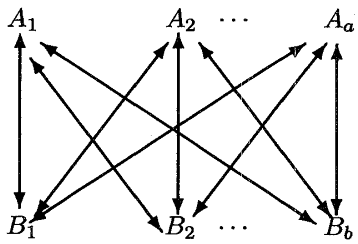

図 3: 相互評価

また民主的な社会では、すべての人々が自己の意見を主張する権利を持つから、企業における能力評価などでも、従来のように上司が平社員を評価するだけでなく、平社員も上司を評価するという権利が出てくる。

また、大学でも、従来は教員が学生の成績を評価するが、教員自身が学生から評価を受けるようになってくる。事実アメリカなどでは、教員の教育面での評価は学生からのアンケート結果が重要な要素となっている大学も多い。これらはいずれも図3のようなANPのパターンとしてモデル化できる。

相互評価システムというものを、一般的に次のようにモデル化することができる;

n個の対象$\{1,2,\cdots,n\}$があって、対象jが対象iを評価するウェイトu_{ij}が次の条件をみたすものとする。

$$
\sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1,\ j = 1 \sim n
$$
$$
u_{ij} \geq 0,\ i,j = 1 \sim n \tag{6.7}
$$

どの対象jについても、その評価ウェイトの和が1であるという条件は、どの対象も同等の権利で他を評価できることを裏付けたものである。なお常識的には自分自身への評価は行わないので、$u_{ii}=0$と考えることにする。

この評価ウェイトを行列の形に並べたもの

$$U=\begin{bmatrix} 0 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

は、どの列での要素の和も1だから明らかに確率行列である。また、対角元が0であるどんな確率行列を考えても、その要素を相互評価システムのウェイトと考えることができる。

したがってどんなANPの超行列もすべて(6.7)の条件を満たす相互評価システムの行列となる。しかしu_{ij}の値のうちどれがゼロでない(正である)かが問題となる。

たとえば図1の場合は、$n=6$となり、対象全体はC,R,Dという評価基準クラスターとA,E,Jという代替案クラスターに分かれるが、jとiが同一のクラスターに属していれば$u_{ij}=0$、異なるクラスターに属していればu_{ij}が正の値を持つ。

一般に正方行列（行数と列数が同一の行列）が与えられたとき(i,j)要素がゼロでないなら点iから点jへの方向をもつ矢線を描き、ゼロなら矢線は描かない、とすると一つの有向グラフが作れる。図1や図3はこのルールによって作られグラフである（図で$(i)\longleftrightarrow(j)$とあるのは$(i)\rightleftharpoons(j)$を簡略化したものである）。

このグラフの構造がANPや相互評価システムでは重要な意味を持つ。ANPではグラフの点がいくつかのクラスター（評価基準のクラスターや代替案のクラスター）に分割され、クラスター間には矢線があるが、クラスター内では矢線を持たないという構造になっていることが多い（ANPでもSaaty氏の提案している"interdependence"という概念はこの限りではないが）。しかし一般の相互評価問題では、そのグラフの構造は必ずしもそのようなクラスターに分かれているとは限らない。

例3　簡単な仮想例であるが、5人からなるあるプロジェクトチームで互いに関連する他者を評価する問題を考えよう。このチームを$\{1,2,3,4,5\}$であらわし、1と3は$\{2,4,5\}$を、2と4は$\{1,3,5\}$を、5は$\{3,4\}$を評価するとする。その評価行列は

$$U=\begin{bmatrix} 0 & u_{12} & 0 & u_{14} & 0 \\ u_{21} & 0 & u_{23} & 0 & 0 \\ 0 & u_{32} & 0 & u_{34} & u_{35} \\ u_{41} & 0 & u_{43} & 0 & u_{45} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & 0 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

でそのグラフは図4のようになる。

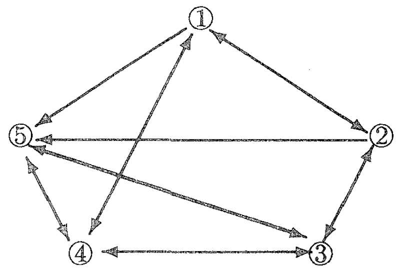

図 4: プロジェクトチーム

このように考えるとANPと相互評価システムとは数学モデル上はとくに差はないものである。今後簡単のためすべてANPと呼ぶことにしよう。上にANPの3つの例とそのグラフ図1,2,4をあげたが、実はこれらは本質的に異なる構造を持っている。そしてANP解析もそれに基づいて変わってくるのである。

6.3　行列の性質と対応するグラフ構造

ANPの解析はその超行列、あるいは相互評価システムとして考えれば、評価行列に基づいてなされるのであるが、これらの行列の性質に応じてANPの解法が異なってくる。またその性質は対応するグラフの構造と密接な関係がある。そこでこの節では行列の性質とそのグラフ構造との関係を調べておこう。

ここで考えられる行列はすべて正方行列で、対応するグラフは上に述べたように(i,j)要素がゼロでないときのみ点iからjへの矢線を持つ有向グラフである。

はじめに既約行列という概念を定義しよう。この言葉の起こりは行列論から始まったものであるが、その定義は対応するグラフで考えたほうがはるかに分かりやすい。既約行列というのは、対応するグラフが強連結であるものを言う。有向グラフの任意の2点i,jを考えるとき、点iからjへ矢線の方向に沿って到達できるとき、このグラフを強連結という。（単に連結というのは、方向を無視して図形的につながっているグラフを言う）。

図1と図4のグラフは強連結であるから対応する行

列(6.2)や(6.9)は既約行列である。しかし図2では、「投」へ他の点から到達できないから、連結ではあるが、強連結ではない。したがって(6.6)は既約行列ではない。

ANPの超行列が既約である場合、その解析は簡単であるが、そうでないと解析法が複雑になる。はじめにANPの超行列はマルコフ過程の推移行列に似ていると述べたが、推移行列が既約であるようなマルコフ過程はエルゴード的と呼ばれるもっとも標準的なものである。エルゴード的マルコフ過程というのは任意の状態から他の状態へ推移できる可能性を持つもので、やはりその解析法は自然で簡単なものとなるのである。

このように既約行列という概念は簡単であるが応用上重要な意義を持っているが、さらにこの既約行列のうち次の条件をもつものを原始行列という；つまり非負の要素をもつ既約行列$\boldsymbol{A}$に対して、

$$\boldsymbol{A}^m > 0 \ (\boldsymbol{A}^m \text{の要素がすべて正}) \tag{6.10}$$

となるmが存在するとき、$\boldsymbol{A}$を原始行列というのである。

例4　例えば

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

は既約であるが、原始でない。しかし

$$\boldsymbol{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

は原始である($\boldsymbol{B}^5 > 0$)。$\boldsymbol{B}$に対するグラフは図5のようになる。

一般に既約行列を考えるとき、その要素の正負は問わないが、原始行列を論ずるとき、その要素は常に非負のみを考えることに注意しよう。ANPの超行列は無論非負行列であるから原始か否かを論ずることができる。

さて前節でみた例1(図1)、例3(図4)は既約行列であったが、このうち例1は原始ではなく、例3は原始である。行列の既約性を調べるのは対応グラフの強連結性を調べれば良いから比較的容易であるが、その原始性を(6.10)式から直接判定するのは容易ではない。し

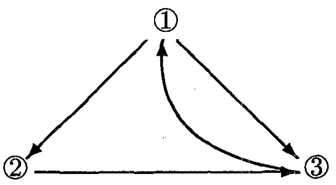

図 5: 原始行列のグラフ

かし幸いにして原始性もグラフ的に判定できる次の定理がある(第1講[4])。

定理 1　行列が原始であるための必要十分条件は、対応するグラフが強連結で、すべてのサイクルの長さの最大公約数が1であることである。

この定理の証明は省略するが、いくつかの例で確かめてみよう。図5は原始行列のグラフであったが、このグラフのサイクルは

$$(1,3,1) \text{と} (1,2,3,1)$$

であってその長さはそれぞれ2, 3であるからその最大公約数は1となっている。また図4のサイクルは$(1,2,1)$, $(2,3,2)$ $\cdots$など長さ2のものと$(1,5,4,1)$, $(2,5,3,2)$ $\cdots$などの長さ3のものがあるから、これだけでもう最大公約数が1であることがわかり、図4に対応する行列(6.9)は原始行列であることがわかる。しかし図1をみると、サイクルの長さはすべて2か4か6$\cdots$かであって最大公約数は2となるから、対応する行列(6.2)は原始ではない。

このように既約行列に対するグラフ上ですべてのサイクルの長さの最大公約数cはきわめて重要な概念でこれをこの行列の周期と呼ぶことにする。原始行列とは周期が1である既約行列である。

また一般に既約行列であって対角元に一つでもゼロでない要素があれば、対応するグラフはループ(始点と終点が同一点である矢線)をもつことになる。これは長さ1のサイクルであるから、それだけでサイクルの長さの最大公約数は1であることがわかる。したがって

「対角元に非ゼロ要素をもつ(非負)
既約行列は原始である」　(6.11)

という性質も生まれる。