講座

AHPからANPへの諸問題 III

高橋 磐郎

5. Binary問題

§2で述べたようにこの講座では主にパラメター($\theta, \theta^2, \cdots$を一対比較値とする方法)を用いているが、その最も簡単な場合は、$\theta(>1)$(より良い)とθ^{-1}(より悪い)の2種類のみとなるが、この場合をbinary問題と呼ぶことにしよう。(一対比較値に$\theta^0 = 1$が含まれる場合も広い意味でbinary問題と呼ばれることもある)。

このbinaryという最も簡単な場合を考えると、一般のAHPでは見えなかった問題点がはっきり現れてくることがある。またbinary問題は、スポーツやゲームなどで、特に相撲や将棋など勝ち負けだけで決まる勝負の結果から、そのプレーヤー(チームや個人)の真の強さを推定すると言った、いわゆるスポーツ科学への応用にも有効である。

5.1 完全情報の場合

一般にbinary問題の一対比較値a_{ij}の結果は、一つの有向グラフで表すことができる。対象iがjより良い(チームiがjに勝った)とき$a_{ij} = \theta$となるが、このとき、点iから点jへの矢線(有向枝)$i \longrightarrow j$があると考える。このグラフはループ(始点と終点が同一の矢線)や多重枝(2点間に何本もの矢線を持つもの)のない単純グラフとなる。

たとえば比較行列が

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta^{-1} & \theta \\ \theta^{-1} & 1 & \theta & \theta \\ \theta & \theta^{-1} & 1 & \theta^{-1} \\ \theta^{-1} & \theta^{-1} & \theta & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.1}$$

であるとき、これに対応するグラフは図1のような完全グラフになる。

一般に完全情報の場合のグラフは完全グラフとなるが、そこでどの3点i, j, kをとってもつねに

$$i \longrightarrow j,\ j \longrightarrow k \quad ならば \quad i \longrightarrow k \tag{5.2}$$

が成り立つとき、このグラフ(あるいは比較行列)は論理的整合性があると呼ぶことにする。論理的整合性を持つ比較行列Aの整合度(§3)は必ずしも0となるわけではない。3点に対して(5.2)が成立しないとき、この3点は(たとえば図1の1,2,3のように)サイクルを構成する。したがってグラフ中にサイクルが多く含まれていれば整合度が悪いと判定される。西澤氏はこのような観点から、binary AHPに対する整合度の評価を行うことを提案している[3]。

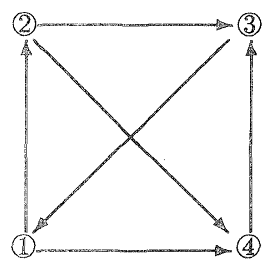

図 1: binaryAHPのグラフ

グラフが論理的整合度を持てば、その点全体は全順序集合となる。つまり各点に一連の番号を次のように付けることができる;まずinput矢線の全くない点が必ず1つだけ存在するからこの点を1番とする(もしすべての点がinputを持てばこのグラフは必ずサイクルができる。またinput矢線のない点が2つ以上存在することはない。2点あれば、その2点を結ぶ矢線はどちらかの点のinputとなるから)。1番の点とそれにつながる矢線をすべて取り除いてできるグラフはやはり整合性を持つ完全グラフとなるから、これについては上と同じ手順をほどこせばよい。

このようにして付けられた番号順に点を並べ替え

たかはし いわろう 日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

たときの対応する比較行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \theta & \theta & \cdots & \theta \\ \theta^{-1} & 1 & \theta & \cdots & \theta \\ \theta^{-1} & \theta^{-1} & 1 & \cdots & \theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^{-1} & \theta^{-1} & \theta^{-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

のようになる。これに対して次のような定理が成り立つ。

定理 1 論理的整合性のある(binary) $n \times n$ 比較行列 $\boldsymbol{A}$ の主固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 i 成分 u_i は $\boldsymbol{A}$ の第 i 行の要素の幾何平均である。つまり

$$u_i = \bar{\theta}^{n+1-2i} \quad (i = 1, \ldots, n), \ \bar{\theta} = \sqrt[n]{\theta}. \tag{5.4}$$

また対応する主固有値は

$$\lambda_{\max} = 1 + \theta \sum_{i=2}^{n} \bar{\theta}^{2(1-i)}. \tag{5.5}$$

□

この定理は、binaryの場合は、論理的整合性を持つ判断がなされている限り、評価値 u_i や主固有値 $\lambda_{\max}$ が解析的に(数値計算せずに)求められることを示している。また(5.4)から明らかなように u_i の値の順位は θ の値に依存しない。

この定理の証明のうち、(5.4),(5.5)で決まる $\boldsymbol{u}, \lambda_{\max}$ が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda_{\max}\boldsymbol{u}$ の関係にある事は単なる数式の計算で容易であるので読者の練習にゆだねよう。$\lambda_{\max}$ の最大性の証明がやや難しいのでこれは文献[1]にゆだねることにする。

むろんいつでも論理的整合性のある判断がなされるとは限らない。また先に述べたようにスポーツなどで勝ち負けの結果から、チームの真の強さを推定する場合にはサイクルがある場合が多い。

[例1] たとえば4つのチームのリーグ(総当り)戦の勝敗が図1のような結果になったとしよう。普通に考えると、①も②も2勝1敗だから同等の強さと判定される。しかし①は②に勝っているから、①の方が少し強いのでは?、と言った意見も起こる。しかしまた、①は③のような弱いチームに負けているからそうとも言えない、といった反論も起る。

さてAHPでの判定はどうなるだろう。$\theta = 2$ として図1に対応する比較行列(5.1)の主固有ベクトルを求めると、

$$\boldsymbol{u}^T = [\,0.298,\ 0.281,\ 0.245,\ 0.176\,]$$

となり、①の方が②よりやや高い値が出ている。θ の値によっても順位は不変である。

このような例があるからといってAHP的判定の方が、勝敗数だけで決める単純な判定より良いかどうかということの保証はない。AHPの固有ベクトル法は、最小二乗法のガウス・マルコフの定理のような強力な定理に裏付けられていないため、強いことが言えないのである。その原因はAHPの一対比較値にはデータモデルがないという点にある。

5.2 不完全情報の場合

Binaryの場合も一般の場合と同様、不完全情報の場合があり得る。とくにスポーツ・ゲームでは勝ち抜きトーナメント戦のように総当りでない場合がしばしば起こる。これに対するグラフは当然、不完全グラフとなる。相撲の場合は、たとえば幕内力士だけを考えてみると、力士の数は現在40人である。したがって1日20試合が行われ、一場所15日全体で、20×15 の試合が行われる。これに対して総当りの場合の試合数は ${}_{40}C_2 = (40 \times 39)/2 = 20 \times 39$ だから、一場所でほぼ半分以下の試合しか行えないことになる。つまり不完全の情報の場合となる。

不完全情報の解析法は§4で述べたように3種の方法、Harker法、二段階(TS)法、LLS法がある。これらを適用すればよい。

[例2] 簡単な4人のトーナメント戦を考えよう。結果が図2の上段のようになったとしよう。これをグラフであらわすと、図2の下段のようなグラフとなる。

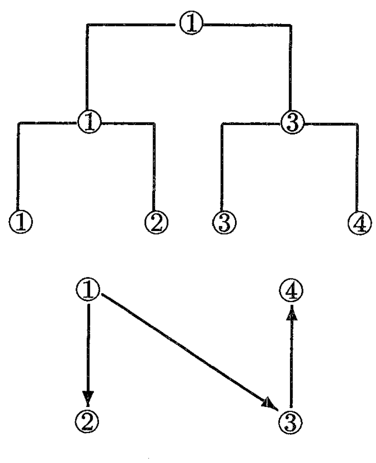

図 2: トーナメントのグラフ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

これに対する比較行列は（$\theta=2$として）

$$A=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&2&2&0\\ 0.5&1&0&0\\ 0.5&0&1&2\\ 0&0&0.5&1\end{bmatrix}\end{array}$$

となる。

Harker法によれば、§4.1の(4.2)式から

$$A=\begin{bmatrix}2&2&2&0\\ 0.5&3&0&0\\ 0.5&0&2&2\\ 0&0&0.5&3\end{bmatrix}$$

の主固有ベクトルを求めることになるが、これをパワー法で求めると、

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\\ 0.5\\ 0.25\end{bmatrix}\qquad \lambda_{\max}=4.00$$

となる。

二段階法では、§4.2より、まず、u_iの第1次近似は

$$\begin{aligned}\hat{u}_1&=(1\times2\times2)^{1/3}&=1.5874\\ \hat{u}_2&=(0.5\times1)^{1/2}&=0.7071\\ \hat{u}_3&=(0.5\times1\times2)^{1/3}&=1.0000\\ \hat{u}_4&=(0.5\times1)^{1/2}&=0.7071\end{aligned}$$

となるから、

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&2.245&1.587&2.245\\ 0.445&1&0.707&1\\ 0.630&1.414&1&1.414\\ 0.445&1&0.707&1\end{bmatrix}$$

となる。この主固有ベクトルをパワー法で求めると、

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0.445\\ 0.630\\ 0.445\end{bmatrix}\qquad \lambda_{\max}=4.00$$

となった。

最後にLLSを適用してみよう。§3.2の(3.4)に相当する式は、

$$\begin{aligned}\log 2&=\dot{u}_1-\dot{u}_2 &&+\dot{e}_{12}\\ \log 2&=\dot{u}_1 \quad -\dot{u}_3 &&+\dot{e}_{13}\\ \log 2&=\qquad\quad \dot{u}_3-\dot{u}_4 &&+\dot{e}_{34}\end{aligned}$$

となる。これに対して、条件$\dot{u}_1+\dot{u}_2+\dot{u}_3+\dot{u}_4=0$の下での最小二乗法を適用すると、(3.7)式のところで示したようにラグランジュ乗数は0であるから、$\dot{u}_i$を決める方程式は結局

$$\begin{aligned}3\dot{u}_1 \qquad\qquad -\dot{u}_4&=2\log 2\\ \dot{u}_2-\dot{u}_3+\dot{u}_4&=-\log 2\\ \dot{u}_2+3\dot{u}_3 \qquad&=0\\ \dot{u}_1+\dot{u}_2 \qquad -\dot{u}_4&=-\log 2\end{aligned}$$

となり、これをとくと

$$\dot{u}_1=\log 2,\ \dot{u}_2=0,\ \dot{u}_3=0,\ \dot{u}_4=-\log 2$$

となる。したがって

$$u_1=2,\ u_2=1,\ u_3=1,\ u_4=1/2$$

以上の結果をまとめると、表1のようになる。(見やすくするため①を基準とした比率で表わしてある)。

表1: トーナメント評価の比較

	Harker	TS	LLS
u_1	1	1	1
u_2	0.500	0.445	0.500
u_3	0.500	0.630	0.500
u_4	0.250	0.445	0.250

$\theta=2$

これをみると、Harker法とLLS法は明らかにおかしな結果となる。つまり③は準優勝者なのに、②と同等の評価しか与えられていない。これに対してTS法はまず妥当な結果である。

[例3] もう一つの例を考えよう。これはトーナメント結果の優勝者と最下位者とが戦って、最下位者の方が勝ってしまったという例である(図3)。

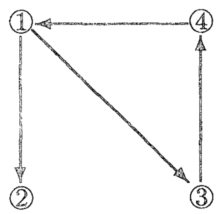

図3: トーナメント補正のグラフ

これに対しても3種の方法を適用すると表2のような結果が得られた。この例でもやはり、TS法は妥当

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

表 2: トーナメント補正評価の比較

	Harker	TS	LLS
u_1	1	1	1
u_2	0.355	0.537	0.5
u_3	1.08	0.928	1
u_4	1.06	0.946	1

$\theta = 2$

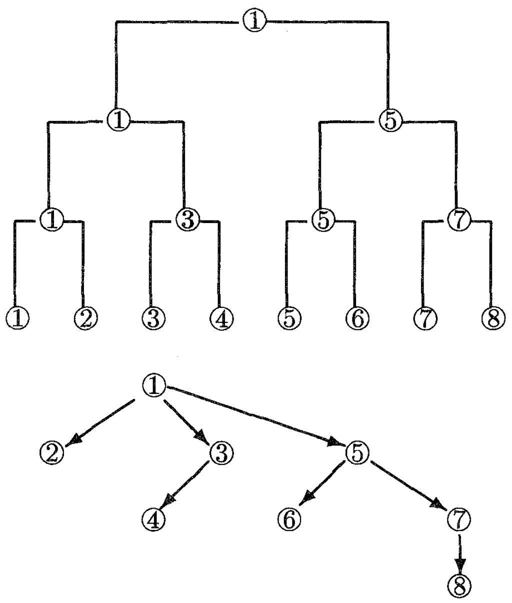

図 4: 8人トーナメントのグラフ

であるが、その他の方法はおかしな結果である。特にHarker法では、1勝1敗の③や④が2勝1敗の①より高く評価されている。

[例4] もう少し数の多い8人のトーナメントに対して比較してみよう[2]。結果が図4のようになったとして、3種の方法の結果は表3のようになる。ここでは簡単のため順位のみを示す。これをみてもHarker方とLLSとは全く同じであるが、TS法より妥当性を欠いている。(この順位はθの値にほぼ無関係である)。

表 3: 8人トーナメト評価の比較

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧
LLS	1	2	2	5	2	5	5	8
Harker法	1	2	2	5	2	5	5	8
TS法	1	5	3	8	2	6	4	7

これらの例は少し小さすぎる例であるが、もう少し大きな例についてもいくつかシミュレーションをやってみた結果は、一般的に試合数の少ない疎な場合はTS方が他の方法より良い(常識と一致する)結果を与える傾向がある事がわかった。

参考文献

[1] I.Takahashi : "AHP applied to binary and ternary comparisons", *Journal of Operation Research Society of Japan*, Vol.33,(1990), 199-206.

[2] I.Takahashi and M.Fukuda: "Comparisons of AHP with other methods in binary paired comparisons", Proceedings of APORS'91, Beijing China (1991).

[3] K.Nishizawa: "A consistency improving method in binary AHP", *Journal of Operation Research Society of Japan*, Vol.38,(1995), 21-33.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.