教養講座

確率モデルとその応用IV

尾崎　俊治

4. 信頼性モデル

4.1 再生過程

前回のポアソン過程の項で述べたように再生過程は到着時間間隔 X_1, X_2, $\cdots$ は独立で同一の一般分布にしたがう計数過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ である．

再生過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ において，各再生（あるいは事象）の到着時間間隔 X_k の分布は

$$F(t) = P\{X_k \leq t\} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．さらに，n 番目の再生が起こるまでの時間 S_n は

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．特に，$S_0 = 0$ と定義する．時刻 t までに再生の起こる回数 $N(t)$ は S_n を用いて

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

となることは明らかである．前回の図 3.3 で示したように 2 つの確率変数 $N(t)$ と S_n との関係は

$$N(t) \geq n \iff S_n \leq t$$

となる．したがって，

$$P\{N(t) \geq n\} = P\{S_n \leq t,\}$$

となる．S_n は独立で同一の分布 $F(t)$ にしたがう確率変数の和であるから，S_n の分布は

$$P\{S_n \leq t\} = F^{(n)}(t) = \overbrace{F * F * \cdots * F(t)}^{n}$$

となる．ここで $F^{(n)}(t)$ は $F^{(0)}(t) = 1$（単位関数），

$$F^{(1)}(t) = F(t)$$

$$F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF(x) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義される．$F^{(n)}(t)$ は同一の分布 $F(t)$ の n 重たたみこみとよばれる．

再生回数がちょうど n である確率は

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

となる．$F^{(0)}(t) = 1$（単位関数）に注意しよう．

例 4.1　$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$，すなわち，ポアソン過程であると仮定すれば，

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq t\} &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!}dx \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

となるから，

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

となり，パラメータ λt のポアソン分布となる．

さて，$N(t)$ の平均 $M(t) = E[N(t)]$ は**再生関数** (renewal function) とよばれる．平均の定義から

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) \end{aligned}$$

となる．したがって，$n = 1$ から無限大まで n 重たたみこみの和をとればよい．

$M(t)$ は時刻 t までに起こる平均再生回数である．一方，$m(t) = dM(t)/dt$ は**再生密度** (renewal density) とよばれ，その時刻 t における再生の起こる割合を表す．

おさき　しゅんじ　広島大学工学部
〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1
受理　97. 11. 21　　再受理　97. *. *

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

例 4.2 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$とすれば，例 4.1 の事実を用いて

$$M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx=\lambda t$$

となる．もちろん，例 4.1 の結果から，$N(t)$ がパラメータλtのポアソン分布にしたがうことから，直ちにその平均は $M(t)=E[N(t)]=\lambda t$ となる．

再生関数 $M(t)$ は

$$\begin{aligned}M(t)&=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)\\&=F(t)+F*\left[\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)\right]\\&=F(t)+F*M(t)\end{aligned}$$

となる．積分表示すれば

$$M(t)=F(t)+\int_0^t M(t-x)dF(x)$$

と書ける．この式は $F(t)$ が与えられたときの未知関数 $M(t)$ に関する積分方程式であり，**再生方程式** (renewal equation) とよばれる．

一般に $F(t)$ のラプラス・スチルチェス変換を

$$F^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF(t)$$

と表す．n 重たたみこみのラプラス・スチルチェス変換は

$$F^{(n)*}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF^{(n)}(t)=[F^*(s)]^n$$

となるから，$M(t)$ のラプラス・スチルチェス変換は

$$\begin{aligned}M^*(s)&=\int_0^{\infty}e^{-st}dM(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[F^*(s)]^n\\&=\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}\end{aligned}$$

となる．

例 4.3 $F(t)=1-e^{-\lambda t}$とすれば，$F^*(s)=\lambda/(s+\lambda)$ となる．したがって，

$$M^*(s)=\frac{\frac{\lambda}{(s+\lambda)}}{1-\frac{\lambda}{(s+\lambda)}}=\frac{\lambda}{s}$$

となるから，逆ラプラス・スチルチェス変換を用いれば，$M(t)=\lambda t$ となり，ポアソン過程の再生関数が得られる．

例 4.4 $F(t)$ を次数 2 のガンマ分布とすれば，$F(t)=1-(1+\lambda t)e^{-\lambda t}$となり，そのラプラス・スチルチェス変換は，$F^*(s)=[\lambda/(s+\lambda)]^2$となる．このとき，再生関数 $M(t)$ のラプラス・スチルチェス変換は，

$$\begin{aligned}M^*(s)&=\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)}=\frac{\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2}{1-\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^2}=\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}\\&=\frac{\lambda}{2s}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2\lambda}{s+2\lambda}\end{aligned}$$

となる．したがって，その逆ラプラス・スチルチェス変換は

$$M(t)=\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda t})$$

となる．

4.2 寿命時間分布と故障率

信頼性モデルにおいて多くの場合，確率変数 X はアイテム（部品，装置，システムなど）の故障が起こるまでの**寿命時間** (lifetime) を表す．寿命時間の分布，すなわち，寿命分布を

$$F(t)=P\{X\le t\}\qquad(t\ge 0)$$

としよう．$F(t)$ は時刻 t までに故障する確率を表す．確率変数 X の残存確率

$$R(t)=1-F(t)=P\{X>t\}\qquad(t\ge 0)$$

は**信頼度**あるいは**信頼度関数**とよばれる．もちろん，$R(t)$ は時刻 t でアイテムが機能している確率を表す．ここでは確率変数 X は特に断わらない限り連続形であると仮定する．確率変数 X の密度は存在し，

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}\qquad(t\ge 0)$$

で与えられる．**故障率** (failure rate) あるいは**ハザード率** (hazard rate) は $R(t)>0$ と仮定して

$$r(t)=\frac{f(t)}{R(t)}\qquad(t\ge 0)$$

と定義される．$r(t)dt=P\{t<X\le t+dt\mid X>t\}$ であることに注意すれば，$r(t)dt$ はアイテムが時刻 t で故障していないという条件の下で，時間区間 $(t,t+dt]$ で故障する条件付き確率を表す．したがって，$r(t)$ は**瞬間故障率** (instantaneous failure rate) と呼ばれることもある．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$F(0)=0$（すなわち $R(0)=1$）と仮定すると，

$$r(t)=\frac{-dR(t)/dt}{R(t)}$$

となるから，初期条件 $R(0)=1$ の下でこの微分方程式を解いて

$$R(t)=\exp\left[-\int_0^t r(x)dx\right]$$

となる．この $R(t)$ を用いて，分布および密度は

$$F(t)=1-\exp\left[-\int_0^t r(x)dx\right]$$

$$f(t)=r(t)\exp\left[-\int_0^t r(x)dx\right]$$

と書くことができる．したがって，分布，密度および信頼度はいずれも故障率 $r(t)$ を用いて書き表すことができる．特に，$\int_0^t r(x)\,dx$ は**累積ハザード関数** (cumulative hazard function) とよばれる．

定義 4.1　故障率 $r(t)$ が非減少（増加あるいは一定）関数ならば，寿命時間分布は，**IFR**(Increasing Failure Rate)，一定関数ならば，**CFR**(Constant Failure Rate)，非増加（減少あるいは一定）関数ならば，**DFR**(Decreasing Failure Rate) と呼ばれる．

明らかに，$r(t)=\lambda$ が一定ならば，

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\qquad(t\geq 0)$$

となり，寿命分布が指数分布のときのみ CFR となる．

一般にアイテムは時間とともに故障しやすくなると考えられる．これは寿命時間分布が IFR であることを意味する．一方，時間が経っても故障しやすさが変化しないアイテムがあれば，理想的なアイテムかもしれない．もっと理想的なアイテムは時間とともに故障しにくくなるものであり，寿命時間分布が DFR であることを意味する．

一般に，ほとんどのアイテムは DFR の初期故障期（幼児期），CFR の偶発故障期（青壮年期）を経て，IFR の摩耗故障期（老人期）になる．人間の寿命についてもこのような変化をたどる．この故障率の変化のグラフを図 4.1 に示す．このグラフは洋式の浴槽に似ているので**浴槽曲線** (bathtub curve) とよばれる．保険数理においては $r(t)$ は**死力** (force of motality) とよばれ，保険，年金の保険料，掛金の算出根拠に用いられている．

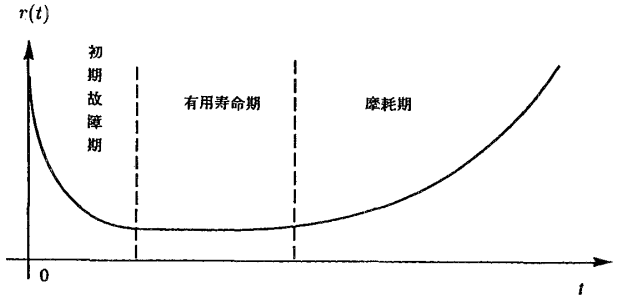

図 4.1　アイテムの故障率曲線（浴槽曲線）

信頼性モデルで用いられている代表的な3つの分布について述べよう．

(i)　指数分布 (exponential distribution)

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}\qquad(t\geq 0,\ \lambda>0)$$

$$r(t)=\lambda$$

故障率が一定となるのは指数分布の場合のみである．故障率が一定であることは故障しやすさが時間的に変化しないということであるから，無記憶性（2.4.1 参照）と同じ意味である．当然，偶発故障であることと指数分布は同義である．

(ii)　ガンマ分布 (gamma distribution)

$$f(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)}\qquad(t\geq 0,\ \lambda>0,\ n>0)$$

ただし，$\Gamma(n)$ は次数 n のガンマ関数である．特に，n が自然数（正整数）ならば，$\Gamma(n)=(n-1)!$ となり，分布関数は

$$F(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}$$

となる．もちろん，$n=1$ のときは指数分布である．$n\geq 1$ ならば，ガンマ分布は IFR となり，$0<n\leq 1$ ならば DFR となる．

特に，ガンマ分布の特別な場合として k–アーラン分布 (k–Erlang distribution)

$$f(t)=\frac{k\lambda(k\lambda x)^{k-1}e^{-k\lambda x}}{(k-1)!}$$

$$(t\geq 0,\ \lambda>0,\ k\text{は自然数})$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

が待ち行列理論などでよく用いられる．この場合，平均 $E[X]=1/\lambda$，分散 $\mathrm{Var}[X]=1/k\lambda^2$ となる．

(iii) ワイブル分布 (Weibull distribution)

$$F(t)=1-e^{-\lambda t^m} \qquad (t\geq 0,\ \lambda>0,\ m>0)$$

$$r(t)=\lambda m t^{m-1}$$

λ は尺度パラメータ，m は形状パラメータとよばれる．$m\geq 1$ ならば，ワイブル分布は IFR となり，$0<m\leq 1$ ならば DFR となる．特に $m=1$ のときは指数分布である．ワイブル分布は寿命時間分布としてよく用いられる．その理由はパラメータが2つあり，いろいろな故障データに適合することである．一方

$$\log_e \log_e \frac{1}{R(t)}=m\log_e t+\log_e \lambda$$

となるから，縦軸に $\log\log[1/R(t)]$ の関数目盛で $F(t)$ の値を，横軸に $\log t$ の関数目盛で t の値をとれば，t と $F(t)$ の関係は直線で示される．故障データを関数方眼紙にプロットして回帰直線を引けば，パラメータの点推定，区間推定，信頼度などを求めることができる．この関数方眼紙はワイブル確率紙 (Weibull probability paper) とよばれ，市販されている．

4.3 非修理系システムの信頼性モデル

一般にアイテムの寿命時間を X とすれば，寿命時間分布 $F(t)$ にしたがって故障する，いくつかのアイテムを並列あるいは直列に配置したシステムを考え，システムの信頼性について議論する．ここでは，保全を考慮しないシステム，いわゆる，非修理系システムについて，その信頼度などについて議論しよう．

最も簡単なシステムは単一ユニットシステムである．一般にアイテムとして議論したが，この節ではアイテムの代わりにユニットを用いる．あるユニットの寿命時間分布を $F(t)$ とすれば，その信頼度は $R(t)=1-F(t)$ となる．特に，ユニットの故障までの平均時間 MTTF(mean time to failure) は

$$\mathrm{MTTF}=\int_0^\infty x\,dF(x)=\int_0^\infty R(x)dx$$

によって計算される．$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，すなわち，指数分布と仮定すれば，

$$\mathrm{MTTF}=\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$$

となることは明らかである．

以下ではこれらのユニットの寿命時間 X は互いに独立な N 個のユニットからなるシステムを考えよう．

(i) N ユニット直列システム

各ユニットは独立であるとし，N ユニットを直列に動作させる．いずれかのユニットが故障すれば，システムは故障となる．各ユニットの寿命時間を X_i $(i=1,2,\cdots,N)$，システムの寿命時間を X とすれば，システムの信頼度は

$$\begin{aligned}R(t)&=P\{X>t\}\\&=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_N)>t\}\\&=P\{X_1>t\}P\{X_2>t\}\cdots P\{X_N>t\}\\&=R_1(t)R_2(t)\cdots R_N(t)\end{aligned}$$

となる．したがって，システムの信頼度は各ユニットの信頼度の積となる．そして，システムの故障率は

$$\begin{aligned}r(t)&=\frac{-dR(t)/dt}{R(t)}\\&=r_1(t)+r_2(t)+\cdots+r_N(t)\end{aligned}$$

となり，各故障率の和となる．直列システムはどれかひとつのユニットが故障すれば，システム全体が故障するとしているので，信頼性の観点から最も厳しいシステムである．

例 4.5 部品加算法 (parts count method)　いくつかの電子部品の故障率 ($1/10^6$ 時間) が与えられたときのシステムの故障率は各部品の故障率の和で見積もる方法が部品加算法である．例えば，あるコンピュータのボードの部品，数量，故障率が下の表のように与えられている．部品加算法によってボードの故障率を計算すれば $15.624/10^6$ 時間となる．

部品	数量	故障率	総故障率
コンデンサ	20	0.0025	0.05
ゲート	30	0.3195	9.555
レジスタ	2	0.8035	1.67
コネクタ	1	4.3490	4.3490
計	53		15.624

(ii) N ユニット並列システム

各ユニットは独立であると仮定し，N ユニットを並列に動作させる．すべての N ユニットが故障すればシ

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ステム故障になる．したがって，システムの寿命時間分布は

$$
\begin{aligned}
F(t) &= P\{X \le t\} \\
&= P\{\max(X_1, X_2, \cdots, X_N) \le t\} \\
&= P\{X_1 \le t, X_2 \le t, \cdots, X_N \le t\} \\
&= P\{X_1 \le t\}P\{X_2 \le t\}\cdots P\{X_N \le t\} \\
&= F_1(t)F_2(t)\cdots F_N(t)
\end{aligned}
$$

となり，各ユニットの寿命時間分布の積となる．

4.4 取替え問題

一般に取替え問題は再生過程を用いて表すことができる．その場合に，故障するまで使用して故障したならば取り替える．しかし，一般に故障後の取替え（**事後取替え**）費用は故障前の取替え（**事前取替え**）費用よりも高い．そこで，より積極的に故障する前に取り替えた方がよいこともある．このような政策を**予防保全政策** (preventive maintenance policy) という．ここでは，取替え問題の中でもよく知られた**年齢取替え問題** (age replacement problem) と**ブロック取替え問題** (block replacement problem) について考える．

(i) 年齢取替え問題

あるユニットを動作させて，一定の年齢t_0までに故障しなければ，事前取替えを行う．しかし，t_0以前に故障したならば，直ちに事後取替えを行う．事後取替え，事前取替えの費用をそれぞれc_1, c_2としよう．$c_1 > c_2$と仮定する．取替えの1サイクルは事前あるいは事後取替えのどちらかが起こるまでとする．そして1サイクル終了後は再び同様なサイクルを繰り返し続ける．ユニットの寿命時間分布は一般分布 $F(t)$ にしたがい，その平均寿命は$1/\lambda$とする．各サイクルに同一のユニットを用いる．

1サイクルの期待費用は

$$c_1 P\{X \le t_0\} + c_2 P\{X > t_0\} = c_1 F(t_0) + c_2 \overline{F}(t_0)$$

となる．ただし，$\overline{F}(t) = 1 - F(t)$ とする．一方，1サイクルの平均時間はどちらか早い方が起こるまでの時間であるから，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_0} t dF(t) + \int_{t_0}^{\infty} t_0 dF(t) \\
&\quad = -t\overline{F}(t)|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt + t_0\overline{F}(t_0) \\
&\quad = \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt
\end{aligned}
$$

となる．したがって，1サイクルの期待費用は

$$C(t_0) = [c_1 F(t_0) + c_2 \overline{F}(t_0)] \Big/ \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt$$

となり，定常状態における単位時間当りの期待費用を表す．この期待費用を最小にする$t_0{}^*$を求めよう．寿命時間分布 $F(t)$ がその密度をもつと仮定して，微分して，0とおけば

$$
\begin{aligned}
&(c_1 - c_2) f(t_0) \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt \\
&\qquad - [c_1 F(t_0) + c_2 \overline{F}(t)]\overline{F}(t_0) = 0
\end{aligned}
$$

となる．故障率$r(t_0) = f(t_0)/\overline{F}(t_0)$を用いて書き直せば，非線形方程式

$$r(t_0) \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt - F(t_0) = \frac{c_2}{c_1 - c_2}$$

を得る．この式の左辺を$q(t_0)$とおけば

$$\frac{dq(t_0)}{dt_0} = \frac{dr(t_0)}{dt_0} \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt$$

となり，$r(t_0)$ と $q(t_0)$ の単調性は一致する．$F(t)$ をIFRと仮定すれば，すなわち $dr(t)/dt > 0$ ならば，$q(\infty) = r(\infty)/\lambda - 1 > c_2/(c_1 - c_2)$，すなわち$r(\infty) > \lambda c_1/(c_1 - c_2)$ならば，

$$q(0) < \frac{c_2}{c_1 - c_2} < q(\infty)$$

となるから，上記の非線形方程式を満たす唯一で有限な最適解$t_0{}^*$が存在する．その他の場合には$t_0{}^* \to \infty$となる．以上をまとめると次の定理を得る．

定理 4.1 $F(t)$は狭義IFR（$r(t)$は単調増加関数）と仮定し，$c_1 > c_2$と仮定する．

(i) $r(\infty) > \lambda c_1/(c_1 - c_2)$ならば

$$r(t_0) \int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt - F(t_0) = \frac{c_2}{c_1 - c_2}$$

を満たす唯一で有限な解$t_0{}^*$が最適取替え年齢となる．そのとき

$$C(t_0{}^*) = (c_1 - c_2) r(t_0{}^*)$$

となる．

(ii) $r(\infty) \le \lambda c_1/(c_1 - c_2)$ならば，最適取替え年齢は$t_0{}^* \to \infty$となる．すなわち，事前取替えはしない方がよい．このとき$C(\infty) = \lambda c_1$となる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

例 4.6 寿命時間分布を2-アーラン分布としよう（4.2のガンマ分布参照）．すなわち，$F(t) = 1-(1+2\lambda t)e^{-2\lambda t}$としよう．ここで，$E[X] = 1/\lambda$となる．故障率は$r(t) = \frac{4\lambda^2 t}{1+2\lambda t}$となり，$r(\infty) = 2\lambda$となる．もし，$r(\infty) = 2\lambda > k = \frac{\lambda c_1}{c_1 - c_2}$，すなわち$c_1/2 > c_2$ならば，

$$r(t_0)\int_0^{t_0} \overline{F}(t)dt - F(t_0) = \frac{c_2}{c_1 - c_2}$$

を満たす唯一の有限のt_0^*が存在し，

$$C(t_0^*) = (c_1 - c_2)r(t_0^*)$$

となる．そうでなければ，すなわち，$c_1/2 \leq c_2$ならば，最適取替え年齢は$t_0^* = \infty$となる（事後取替え）．

(ii) ブロック取替え問題

年齢取替え問題はユニットの動作開始時を記録し，あらかじめ決めたt_0において予防保全政策として，ユニットを取り替えた．それに対して，ブロック取替えはユニットの使用年齢に関係なく，時刻kT ($k = 1, 2, \cdots$)で必ず事前取替えを行う．例えば，年末に電球を取り替えるとすれば，それは正にブロック取替えである．もちろん，時間間隔$[0, T]$で故障したユニットは直ちに取り替えるとする．1回の事後取替え費用をc_1，事前取替え費用をc_2としよう．当然，$c_1 > c_2$と仮定する．

1サイクルを$(k-1)T$からkTと考えれば，1サイクル当りの期待費用は

$$B(T) = \frac{c_1 M(T) + c_2}{T}$$

となる．これが，定常状態における単位時間当りの期待費用である．ただし，

$$M(T) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(T)$$

は再生関数である．

$T \to 0$とすれば，$B(T) \to \infty$となり，$T \to \infty$とすれば，$B(\infty) = \lambda c_1$となる．ただし，$1/\lambda$は平均寿命時間を表す．したがって，$0 < T \leq \infty$で$B(T)$を最小にする少なくとも1つのTの値は存在する．$B(T)$の右辺を微分して，0とおいて，

$$m(T)T - M(T) = \frac{c_2}{c_1}$$

となる．ここで，$m(T)$は再生密度を表す．この非線形方程式を解けば，$B(T)$を最小にする最適取替え時刻T^*は求められる．そして，$B(T^*) = c_1 m(T^*)$となる．

例 4.7 例4.6で示したように，$F(t)$を2-アーラン分布とすれば，その再生関数は

$$M(t) = \lambda t - \frac{1}{4}(1 - e^{-4\lambda t})$$

となる（k−アーラン分布については4.2項）．ただし，$F(t)$の平均$E[X] = 1/\lambda$である（$E[X] = 1/\lambda$にするためにアーラン分布を用いた）．再生密度は$m(t) = dM(t)/dt = \lambda(1 - e^{-4\lambda t})$となるから，

$$\frac{1}{4}(1 - e^{-4\lambda T} - 4\lambda T e^{-4\lambda T}) = \frac{c_2}{c_1}$$

なる非線形方程式を解けばよい．上式の左辺は$T \to \infty$で1/4となるから，$c_2/c_1 \geq 1/4$ならば，$T^* \to \infty$となる．一方，$c_2/c_1 < 1/4$ならば，上記の非線形方程式を満たす有限で唯一の解T^*が存在し，そのときの最小期待費用は

$$B(T^*) = c_1\lambda(1 - e^{-4\lambda T^*})$$

となる．

参考文献

ORにおける確率モデルを扱った本は数多く出版されている．Ross [11]の最初の本は既に古典になっているが，簡潔にまとめている．Rossの最近の本は数冊出版されていて，アメリカの大学のこの分野の代表的教科書になっている．待ち行列，在庫管理，信頼性理論などの確率モデルをまとめたハンドブック [12, 13]は有用である．

[11] Ross, S. M. : "Applied Probability Models with Optimization Applications", Dover Publications, New York, 1970.

[12] Heyman, D. P. and Sobel, M. J. (Eds.) : "Stochastic Models", Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1990 (邦訳あり).

[13] Graves, S. C., Rinnooy Kan, A. H. G. and Zipkin, P. H. (Eds.): "Logistics of Production and Inventory", Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1993.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．