講座

AHPからANPへの諸問題II

高橋　磐郎

3.　対数最小二乗法（LLS）

前回の2.でAHPとはどんなものかをのべた。この方法が評価問題や意思決定問題に幅広い応用をもつことは、文献[1][2]などをはじめとして、近年内外のOR学会にも多くの研究発表があるので、それらを参照されたい。この3.では、従来からある統計的方法で、AHPの固有ベクトル法（EV法）に極めて近い結果を与える対数最小二乗法（logarithmic least square method ;LLS）についてのべ、AHPのEV法と比較して考えてみたい。

3.1　LLSとは

LLSはAHPと同様の比較行列$A=[a_{ij}]$から出発して、これに基づいて$1,2,\cdots,n$各対象の真の評価値を推定する方法である。LLSではa_{ij}というデータは連続な実数値をとるものとして、

$$a_{ij}=\frac{u_i}{u_j}e_{ij},\ i,j=1,\cdots,n,i<j \tag{3.1}$$

という構造を持つという仮定から出発する。ここでe_{ij}は誤差を表す確率変数で常に正であると仮定する。(3.1)の意味するところはiとjとの一対比較値a_{ij}は、その真の評価値u_iとjのそれu_jとの比であらわされるべきだが、そこに誤差が含まれることを表していて、妥当な仮定であると言えよう。なお、$a_{ji}=1/a_{ij}$が成り立つものとすると、$i\geq j$の部分のデータa_{ij}は不要である。

一般に統計学では、つねにデータに対する構造式（モデル）を仮定することから出発する。統計的推定というのは、そのモデルの中の未知パラメタをデータの関数によって近似するような近似式を作ることであると言える。(3.1)ではu_i $(i=1\sim n)$が未知パラメタであるから、a_{ij}によるu_iの近似式をどのように作ればよいかが問題になる。

たかはし　いわろう　日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

そこで(3.1)の両辺の(eを底とする)対数をとると、

$$\log a_{ij}=\log u_i-\log u_j+\log e_{ij}$$

となるが、今後式を簡単にするため、対数をドットであらわすことにすると上式は

$$\dot{a}_{ij}=\dot{u}_i-\dot{u}_j+\dot{e}_{ij},\ i,j=1,\cdots,n,i<j \tag{3.2}$$

となる。

ここで、$\dot{e}_{ij}$は期待値が0、分散が（i,jに無関係に）σ^2である、つまり

$$\mathrm{E}(\dot{e}_{ij})=0,\ \mathrm{V}(\dot{e}_{ij})=\sigma^2 \tag{3.3}$$

であって、独立な確率変数であると仮定しておくと、(3.2)に対する最小二乗推定$\widehat{\dot{u}_i}$が$\dot{u}_i(i=1\sim n)$に対する最良の推定を与えるというのが、有名なガウス・マルコフの定理である[6]。

ここで最良というのは、線形推定つまり、データの一次式の推定のうちで、最小二乗法の精度が一番よいということを意味する（また(3.3)の他に$\dot{e}_{ij}$が正規分布をするという仮定をおけば、一次式という制限がなくても、最小二乗推定が最良であることが示されている）。

3.2　LLSの計算法

さて早速LLSを$n=4$の簡単な例で計算してみよう。$n=4$に対して(3.2)を具体的に列挙してみると、

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{12}&=\dot{u}_1-\dot{u}_2&&+\dot{e}_{12}\\
\dot{a}_{13}&=\dot{u}_1\quad-\dot{u}_3&&+\dot{e}_{13}\\
\dot{a}_{14}&=\dot{u}_1\quad\quad-\dot{u}_4&&+\dot{e}_{14}\\
\dot{a}_{23}&=\quad\dot{u}_2-\dot{u}_3&&+\dot{e}_{23}\\
\dot{a}_{24}&=\quad\dot{u}_2\quad-\dot{u}_4&&+\dot{e}_{24}\\
\dot{a}_{34}&=\quad\quad\dot{u}_3-\dot{u}_4&&+\dot{e}_{34}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

となるが、これに最小二乗法（誤差$\dot{e}_{ij}$の二乗和が最小となるように$\dot{u}_1,\dot{u}_2,\dot{u}_3,\dot{u}_4$を決定する）を適用する。

最小二乗法は誤差の二乗和が最小になるようにパラメタの推定値を決める方法である。ただしこの場合

は(3.1)が示すように$u_i(i=1\sim n)$は比だけが問題で、一定倍は任意である、したがってその対数$\dot{u}_i(i=1\sim n)$は一定値を加えることは任意である。そこで

$$\dot{u}_1+\dot{u}_2+\dot{u}_3+\dot{u}_4=0 \tag{3.5}$$

と仮定しても一般性を失わない。

(3.5)の条件の下で、誤差の二乗和

$$\begin{aligned} S &= \dot{e}_{12}^2+\dot{e}_{13}^2+\cdots+\dot{e}_{34}^2 \\ &= (\dot{a}_{12}-\dot{u}_1+\dot{u}_2)^2+(\dot{a}_{13}-\dot{u}_1+\dot{u}_3)^2 \\ &\quad +\cdots+(\dot{a}_{34}-\dot{u}_3+\dot{u}_4)^2 \end{aligned}$$

を最小にするには、ラグランジュ乗数法を用いると、ラグランジュ関数$L=S+\lambda(\dot{u}_1+\dot{u}_2+\dot{u}_3+\dot{u}_4)$に対して、

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}=\frac{\partial S}{\partial u_i}+\lambda=0 \quad (i=1\sim 4) \tag{3.6}$$

を作り、(3.6),(3.5)の解を求めればよい。

(3.6)を整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u_1} &= 2\{-(\dot{a}_{12}-\dot{u}_1+\dot{u}_2)-(\dot{a}_{13}-\dot{u}_1+\dot{u}_3) \\ &\quad -(\dot{a}_{14}-\dot{u}_1+\dot{u}_4)\}+\lambda \\ &= 2\{-\dot{a}_{12}-\dot{a}_{13}-\dot{a}_{14}+3\dot{u}_1-\dot{u}_2-\dot{u}_3 \\ &\quad -\dot{u}_4\}+\lambda \\ &= 2\{-\dot{a}_{12}-\dot{a}_{13}-\dot{a}_{14}+4\dot{u}_1\}+\lambda \ \ ((3.5)\text{より}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\partial S/\partial u_2, \partial S/\partial u_3\cdots$に対しても同様にすると、

$$\begin{aligned} &2\{-\dot{a}_{12}-\dot{a}_{13}-\dot{a}_{14}+4\dot{u}_1\}+\lambda=0 \\ &2\{\ \dot{a}_{12}-\dot{a}_{23}-\dot{a}_{24}+4\dot{u}_2\}+\lambda=0 \\ &2\{-\dot{a}_{13}+\dot{a}_{23}-\dot{a}_{34}+4\dot{u}_3\}+\lambda=0 \\ &2\{\ \dot{a}_{14}-\dot{a}_{24}+\dot{a}_{34}+4\dot{u}_4\}+\lambda=0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

を得るが、これをすべて加えて、(3.5)を考えると$\lambda=0$となることがわかる（一般に一次式条件の下での二次式の最小化問題に対するラグランジュ乗数は常に0となることがわかる）。したがって(3.7)より求める最小二乗推定は

$$\begin{aligned} \widehat{u_1} &= (\dot{a}_{12}+\dot{a}_{13}+\dot{a}_{14})/4 \\ \widehat{u_2} &= (-\dot{a}_{12}+\dot{a}_{23}+\dot{a}_{24})/4 \\ \widehat{u_3} &= (-\dot{a}_{13}-\dot{a}_{23}+\dot{a}_{34})/4 \\ \widehat{u_4} &= (-\dot{a}_{14}-\dot{a}_{24}-\dot{a}_{34})/4 \end{aligned}$$

となる。これを元に戻すと

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= (a_{12}a_{13}a_{14})^{1/4} \\ \hat{u}_2 &= (\frac{1}{a_{12}}a_{23}a_{24})^{1/4} \\ \hat{u}_3 &= (\frac{1}{a_{13}}\frac{1}{a_{23}}a_{34})^{1/4} \\ \hat{u}_4 &= (\frac{1}{a_{13}}\frac{1}{a_{24}}\frac{1}{a_{34}})^{1/4} \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。この場合の比較行列は

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & a_{34} \\ 1/a_{14} & 1/a_{24} & 1/a_{34} & 1 \end{bmatrix}$$

であるから、LLSの解(3.8)は

$$\hat{u}_i\text{は比較行列の第}i\text{行の幾何平均} \tag{3.9}$$

であるという法則になる。(3.9)式は一般のnに対しても当然成り立つ法則で極めて簡明で覚えやすい。2.の例1にLLSを適用すると、$\theta=2$の場合、

$$\begin{aligned} [\ \hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \hat{u}_3\ ] &= [\ \theta^{2/3},\ 1,\ \theta^{-2/3}\ ] \\ &= [\ 1.5874,\ 1,\ 0.6300\ ] \end{aligned}$$

となるが、これを和が1となるように基準化すると[0.493, 0.311, 0.196]なってAHPの固有ベクトル法(EV法）の結果と完全に一致する（じつは$n\leq 3$の場合は、AHPとLLSの結果は一致することが証明されている[7]）。また2.の例2に対するLLSの結果は

$$\begin{aligned} [\hat{u}_1\ \hat{u}_2\ \hat{u}_3\ \hat{u}_4\ ] &= [\ \theta^{1/4},\ \theta^{1/4},\ \theta^{-1/4},\ \theta^{-1/4}\ ] \\ &= [\ 1.189,\ 1.189,\ 0.841,\ 0.841\ ] \end{aligned}$$

これを正規化すると[0.293, 0.243, 0.207, 0.207]となってAHPの結果[0.294, 0.276, 0.213, 0.203]とはやや異なるが極めて近い値となる。

3.3 固有ベクトル法(EV法)の根拠

以上のように、ガウス・マルコフの定理が、LLSが最良であること（むろん対数変換という変換を通してではあるが）を明記しているのに、何故Saaty氏はEV法という新しい方法を提案したのだろう。これは私の推測であるが、まずEV法は線形推定でないから、LLSよりよい精度を与える可能性はある。しかしガウス・マルコフの定理は、線形推定でなくとも、誤差が正規分布をするなら、LLSが最良であることを示している。

ここで考えねばならないことは、AHPの一対比較のデータa_{ij}は、ここでのべたパラメタ法もまたSaaty氏の1〜9法も、いずれも離散的データで、連続性がないという点である、離散データは当然正規分布をしないから、ガウス・マルコフの定理の考慮の外にある。したがってEV法はこのような離散データに対して良い結果を与えるという可能性をもっている。

事実、後述するように、離散性の最も著しいbinaryの場合、EV法がLLSより、直感的に、良いと思われる結果を与える。むろん、なんらかの客観的尺度で、その良さを証明することはまだなされていない。それが困難な理由は、AHPのデータには(3.1)式のようなデータモデルの仮定がないからである。この点がアカデミックな統計学者から異端視される理由である。彼等はデータにはかならずモデルを対応させて理論を展開するからである。

さてそれならEV法の根拠はどこにあるのだろうか、対象iの真の評価値をu_i $(i=1\sim n)$として、一対比較値に誤差がないとすれば、$a_{ij}=u_i/u_j$となる筈であるから、比較行列は

$$A=\begin{bmatrix} 1 & u_1/u_2 & \cdots & u_1/u_n \\ u_2/u_1 & 1 & \cdots & u_2/u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n/u_1 & u_n/u_2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

となるが、この最大固有値$\lambda_{\max}$はn（その他の固有値はすべて0）となり、$\lambda_{\max}$に対する固有ベクトル（主固有ベクトル）は$[\ u_1\ u_2\ \cdots\ u_n\ ]$となることは容易にわかる（色々な証明法があるが[7]が最も初等的でわかり易い）。

このことは比較行列は、もし誤差がなければ、つまり整合性が完全であれば、その主固有ベクトルが正しい答えを与えることを示している。そこで、比較行列に多少の誤差があっても、その主固有ベクトルが真の値$u_1,\cdots,u_n$に対する近似値を与えるであろうと考えることができる。以上がEV法の根拠である。

また一般に$n\times n$行列$A=[a_{ij}]$の成分が$a_{ji}=1/a_{ij}$という性質をもつとき、Aを逆数行列と呼ぶが、このとき$a_{ij}>0$なら、Aの最大固有値$\lambda_{\max}$はつねにn以上、$\lambda_{\max}\geq n$、となることが証明されている（[5]）。そこで

$$c=(\lambda_{\max}-n)/(n-1) \tag{3.11}$$

を整合度と呼び、$c\leq 0.1$程度なら比較行列Aの整合度は良好とみて、この比較行列は信頼性のおけるものとして取り扱おうというのが、AHPの主張である。0.1という数値は経験的なものとみるのが良いだろう。

4. 不完全情報のAHP

AHPでは代替案間の比較の場合でも、評価基準間の比較の場合でも、一対比較のデータa_{ij}がある(i,j)に対して、欠落する場合がしばしば起こる。これを不完全情報の場合と呼ぶことにする。これに対してデータが完全に揃っている場合が完全情報である。

不完全情報の場合比較行列Aのいくつかの要素a_{ij}が欠落することになるから、そのままではEV法による解析をすることができない。これに対する方法としてHarker (Takeda)法および二段階法(Two-Stage,TS法)が開発されている。またLLSは、不完全情報であっても、最小二乗法の原則をそのまま用いることができるので、直接適用可能である。むろん不完全情報の場合は完全情報の場合のように幾何平均というような簡単な公式は得られないが。

一般に対象数nが大きいとき、その一対比較総数は${}_nC_2=n(n-1)/2$となるから、nの二乗のオーダーで増加するため、完全情報のデータを得るために大変な手間がかかる。そこでむしろ積極的に不完全情報を利用しようという考えが起こる。こう考えると不完全情報の解析は、単に欠落部の補正処理という消極的な面でなく、効率の良い情報を得るという積極的面で重要である。このとき一対比較全体の中からどのような対を選んで比較すれば最も効率的かという、統計学でのいわゆる、計画(design)問題が重要になってくるが、これについては後ほど紹介しようと思う。

4.1 Harker法

これはP.T.Harker氏[8]および竹田英二氏[9]によって発案された方法であるが、極めて自然な考えである。

たとえばつぎのような不完全情報の比較行列

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & () \\ a_{31} & a_{32} & 1 & () \\ a_{41} & () & () & 1 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

が与えられたとしよう。$a_{ji}=1/a_{ij}$で()は欠落部を示す。

Harker法は、対象iの真の値を$u_i(i=1\sim n)$とするとき、もし(i,j)要素が欠落ならこれをu_i/u_jで置き換

えてできる行列$\widetilde{\boldsymbol{A}}$を考え、その主固有ベクトルを求めようという考えである。

上の例で言えば

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & u_2/u_4 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & u_3/u_4 \\ a_{41} & u_4/u_2 & u_4/u_3 & 1 \end{bmatrix}$$

となるが、この主固有ベクトルを求める式は

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & u_2/u_4 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & u_3/u_4 \\ a_{41} & u_4/u_2 & u_4/u_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

となるから、これを書き下ろすと

$$\begin{aligned} u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 &= \lambda u_1 \\ a_{21}u_1 + \quad u_2 + a_{23}u_3 + \quad u_2 &= \lambda u_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + \quad u_3 + \quad u_3 &= \lambda u_3 \\ a_{41}u_1 + \quad u_4 + \quad u_4 + \quad u_4 &= \lambda u_4 \end{aligned}$$

となるが、これを整理して再び行列の形に書けば、

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 2 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 2 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

となる。つまり与えられた欠落行列(4.1)の代わりに(4.2)の左辺にあらわれるような行列の主固有ベクトルを求めるというが、Harker法の考えである。

(4.2)の左辺の行列は(4.1)から次のルールでつくればよいことがすぐわかる；

(i) 欠落した要素は0とおく

(ii) 対角元はその行の欠落個所の個数に1を加えたものを置く

[例1] 前講2.の例2に対して、$(2,4),(3,4),(4,2),(4,3)$が欠落している場合の行列を（$\theta=2$として）考えよう。これを再録すると

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 1 & 2 & () \\ 2 & 0.5 & 1 & () \\ 0.5 & () & () & 1 \end{bmatrix}$$

となるが、上記のルールによって

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

の主固有ベクトルを求めればよい。この場合も行列の原始性、既約性（詳細は後程のべる）からパワー法が収束することが証明されている。その結果は、次のようになる。

$$\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 0.286, & 0.310, & 0.302, & 0.102 \end{bmatrix}$$

4.2 二段階法（TS法）

TS法は一応筆者の発案[10]であるが、これも極めて自然な考えで誰でも思いつくものであろう。これは(4.1)のような不完全情報の比較行列$\boldsymbol{A}$が与えられたとき、次のように二段階で解を得る方法である；

(i) $\boldsymbol{A}$の第i行の実測部のみ（欠落部は除いて）の幾何平均をとってu_iの第一次近似$\hat{u}_i (i = 1 \sim n)$を求め、$\boldsymbol{A}$の欠落部(i,j)の要素を$\hat{u}_i/\hat{u}_j$で推定して、欠落部のない行列$\widehat{\boldsymbol{A}}$を作る。

(ii) $\widehat{\boldsymbol{A}}$の主固有ベクトル$\boldsymbol{u} = [\,u_1, \cdots, u_n\,]$を求めて、この成分を各対象の真の評価値とする。

[例2] 上の例1に対してTS法を適用してみる。各u_iの第一次近似$\hat{u}_i (i = 1 \sim n)$は

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= (1 \times 2 \times 0.5 \times 2)^{1/4} = 1.1892 \\ \hat{u}_2 &= (0.5 \times 1 \times 2)^{1/3} = 1 \\ \hat{u}_3 &= (2 \times 0.5 \times 1)^{1/3} = 1 \\ \hat{u}_4 &= (0.5 \times 1)^{1/2} = 0.7071 \end{aligned}$$

となるから

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & 1 & 2 & 1.4142 \\ 2 & 0.5 & 1 & 1.4142 \\ 0.5 & 0.7071 & 0.7071 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、この主固有ベクトルは（やはりパワー法を用いて求めると）

$$\boldsymbol{u}^T = \begin{bmatrix} 0.293, & 0.272, & 0.278, & 0.157 \end{bmatrix}$$

となる。

これはむろんHarker法の結果とやや異なっているが、どちらがよい推定なのかについては後ほどゆっくり議論するつもりである。

4.3 不完全情報に対するLLS法

LLSは不完全情報でも直接適用することができる、さっそく上の例について解いてみよう。この場合(3.2)に対する式は

$$
\begin{aligned}
\log 2 &= \dot{u}_1 - \dot{u}_2 + \dot{e}_{12} \\
\log 0.5 &= \dot{u}_1 - \dot{u}_3 + \dot{e}_{13} \\
\log 2 &= \dot{u}_1 - \dot{u}_4 + \dot{e}_{14} \\
\log 2 &= \dot{u}_2 - \dot{u}_3 + \dot{e}_{23} \\
0 &= \dot{u}_1 + \dot{u}_2 + \dot{u}_3 + \dot{u}_4
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

となる。これに対する最小二乗法推定は(3.2)と同様に計算すると、つぎのような方程式の解を求めればよいことがわかる。

$\dot{u}_1$	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_3$	$\dot{u}_4$	
4	0	0	0	$\log 2 + \log 0.5 + \log 2$
0	3	0	1	$-\log 2 + \log 2$
0	0	3	1	$-\log 0.5 - \log 2$
0	1	1	2	$-\log 2$

これをとくと、

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= \frac{1}{4}\log 2, & u_1 &= 2^{1/4} = 1.1892 \\
\dot{u}_2 &= \frac{1}{4}\log 2, & u_2 &= 2^{1/4} = 1.1892 \\
\dot{u}_3 &= \frac{1}{4}\log 2, & u_3 &= 2^{1/4} = 1.1892 \\
\dot{u}_4 &= -\frac{3}{4}\log 2, & u_1 &= 2^{-3/4} = 0.5946
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

これを基準化すると

$$u^T = \left[\ 0.286,\quad 0.286,\quad 0.286,\quad 0.143\ \right]$$

となる。

以上の3種類の方法で答えは少しずつ異なっているが、いずれが良いかは一概には言えない。経験的な結果を大まかに言えば、Harker法は欠落部が比較的少ない場合に良い結果を与えるが、欠落部が多くなると結果は良くなくなる。それに対してTS法は欠落部が多い場合に比較的安定した良い結果を与える。LLSはその中間と言えばよいだろう。

いずれの方法でも不完全情報で注意せねばならないことは；欠落部があまり多すぎて、一対比較の連鎖が切れるような場合、もう少し詳しく言うと、(i,j)が実測部であるときに限って点iから点jに枝を描くことによってできるグラフが連結でない場合、当然ながら、推定が不可能になる。このような場合は、上のグラフが連結となるように実測部を増やさねばならない。

参考文献

[1] 刀根薫: "ゲーム感覚意思決定法", 日科技連出版(1995).

[2] 刀根薫, 真鍋竜太郎編:"AHP事例集", 日科技連出版(1990).

[3] T.L.Saaty:"The Analytic Hierarchy Process", McGraw Hill, New York(1980).

[4] T.L.Saaty: "The Analytic Network Process", RWS Publications(1996).

[5] 伊藤,岩井,岩堀,上林,奥野,高橋:"行列とその応用",紀伊国屋書店(1987).

[6] 高橋磐郎, 小林竜一, 小柳芳雄:"統計解析", 培風館(1994).

[7] I.Takahashi:"AHP applied to binary and ternary comparison," *Journal of Operation Research Society of Japan*, Vol.33,No.3,(1990),199-206.

[8] Harker P.T.:"Incomplete pairwise comparisons in the Analytic Hierarchy Process," *Math.Modelling*, Vol.9,(1987),838-848.

[9] 竹田英二:"不完全一対比較行列におけるAHPウェイトの計算法," オペレーションズ・リサーチ, Vol.34,No.4,(1989),169-172

[10] I.Takahashi and M.Fukuda:"Comparisons of AHP with other methods in binary paired comparisons," Proceedings of the Second Conference of APORS within IFORS,(1991),325-331.