評価のORと数理計画

——DEAを中心として——

刀根　薫*

1　はじめに

「評価」という問題はORの大きなテーマであり，これまでも多くの研究がなされてきた．5年程前からOR学会では「評価のOR」という研究部会（現在は研究グループ）を設けてこの方面の研究を進めている．そこでは主としてDEA（Data Envelopment Analysis, 包絡分析法）とAHP（Analytic Hierarchy Process, 階層化意思決定法）が取り上げられてきたが，この稿では前者にしぼってユーザーのためのという視点から書いてみることにしたい．

2　数理統計から数理計画へ

数理統計学は数百年の歴史をもつのに対して数理計画は高々50年の歴史しかない．その間数理統計学は理論と応用の面で大きな進歩を達成してきた．回帰分析，実験計画，多変量解析，品質管理等はそれらの成果といえよう．しかし，いわば「遅れて来た」数理計画法でもこれらの分析がほぼ同様にできることが最近分かってきた．例えば，末吉[7]は回帰分析が，検定も含めて，数理計画でできることを示している．最小二乗法は制約式のない2次計画とみなせるし，パラメータに制約を付加する場合にはまさに2次計画法を用いる必要がある．このようにメリットの多い数理計画法がなぜ統計分析にあまり使われないのか．その点に関しては様々な意見もあるようだが，なんと言っても数理統計人口と数理計画人口の圧倒的な差があることは事実であり，また普及書が見あたらないこともあげることができよう．どなたか「数理計画による統計解析入門」といった本を書く人はいないだろうか．手軽に利用できるソフトの不足も一因ではある．しかし，最近はこの面での進歩はめざましい．Excel Solverは非線形計画法のビルトインソフトであり，比較的手軽に利用できる．（初心者にはちょっと使いにくいのが残念だが.）また，これまで数理統計学の独壇場であったような分野に，数理計画が割って入り，めざましい成果をあげはじめている分野がある．DEAはその典型といえるであろう．もともと生産経済学の問題であるが，投入と産出の関係を生産関数として設定しそのパラメータを推計する．その際，線形生産関数やCobb-Douglas型生産関数がしばしば使われている．図1に示すような1投入と1産出の8個のサンプル点（■）に対して線形生産関数を仮定し，そのパラメータを最小二乗法で当てはめると図1の太い線に示すような回帰直線が得られる．この線より上の点は生産性が優れているのに対して，下の点は劣っているとするのが一つの見方である．回帰線はその性質から平均的な傾向を反映する．したがって生産性の劣った点の影響も受ける．それに対して優れものを基準にした見方をするのがDEAによる評価である．仮に（産出／投入）という指標でサンプル点を評価し，規模の収穫が一定であると仮定すれば，図1の点線で示すフロンティアが出現し，規模の収穫が可変と仮定すれば折れ線で示すフロンティアが得られる

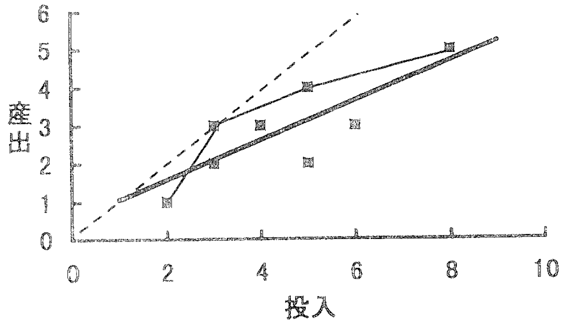

図1　回帰線とフロンティア線

3　DEAの基本

通常，回帰分析では多投入対1産出の関係を調べるのに対して，DEAでは多投入対多産出の関係を対象とする．いま，nコの事業体（Decision Making Unit=DMU

*とねかおる　政策研究大学院大学〒338 浦和市下大久保255

）があり，事業体kの投入ベクトルを$\boldsymbol{x}_k \in R^m$，産出ベクトルを$\boldsymbol{y}_k \in R^s$とする．また，投入行列を$X \in R^{m\times n}$，産出行列を$Y \in R^{s\times n}$とする．そのとき，図1の点線の右下の領域を規模の収穫一定という仮定の下での生産可能集合という．その領域は次のような点$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$の集合となる．

$$P = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) | \boldsymbol{x} \geq X\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{y} \leq Y\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\}. \quad (1)$$

すなわち，現存するDMUの非負結合の点より投入が多く，産出が少ない活動は可能であるとする．非負結合の代わりに凸結合としてPの条件に

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$$

を追加すれば，図1の折れ線の右下の部分で表した規模の収穫可変の場合の生産可能集合となる．この生産可能集合Pの中で，事業体kの効率性を次の線形計画により測定する．

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{LP}] \quad \min \quad \theta && (2)\\
&\text{subject to} \quad \theta\boldsymbol{x}_k \geq X\boldsymbol{\lambda} && (3)\\
&\boldsymbol{y}_k \leq Y\boldsymbol{\lambda} && (4)\\
&\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}. && (5)
\end{aligned}$$

このLPは，生産可能集合の中で，現在の事業体kの産出量$\boldsymbol{y}_k$を保持しながら投入量$\boldsymbol{x}_k$を一様に縮小できる限界θを調べている．これが入力型のCCR(Charnes-Cooper-Rhodes [1])モデルである．同様に現在の投入量の範囲内で最大の産出を測定する出力型のモデルもある．また，上記の凸型制約を付加したモデルをBCC(Banker-Charnes-Cooper)モデルというが，詳細については[8]を参照されたい．[LP]の双対問題は非負変数$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$をもとに次のようになる．

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{DLP}] \quad \max \quad \boldsymbol{u}\boldsymbol{y}_k && (6)\\
&\text{subject to} \quad \boldsymbol{v}\boldsymbol{x}_k = 1 && (7)\\
&-\boldsymbol{v}X + \boldsymbol{u}Y \leq \mathbf{0} && (8)\\
&\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}. && (9)
\end{aligned}$$

このLPは，次のように解釈することができる．$\boldsymbol{v}$を投入財の仮想的なコスト，$\boldsymbol{u}$を産出財の仮想的な価格とする．そのとき，(8)はすべてのＤＭＵについて仮想的な利益が非正であるという制約を示し，目的関数は当該のＤＭＵの利益を最大化することを意味する．更に，このLPは次の分数計画と同値である．

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{FP}] \quad \max \quad \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}_k}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}_k} && (10)\\
&\text{subject to} \quad \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}_j} \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n) && (11)\\
&\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}. && (12)
\end{aligned}$$

ただし，X, Yは正であると仮定する．この分数計画には次のような具体的な意味がある．入力の加重和と出力の加重和の比をすべての事業体について1以下に押さえた上で，当該の事業体の比を最大化するような加重$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$を求める．当然，効率的な事業体の場合，最適値は1である．

4　DEAの特長

上記のようにDEAは数理計画に基づく評価のＯＲのための新手法であるが，その特長は次のような点にある．

1. これまで比率尺度の経営指標としては，1入力対1出力の単純な比率を用いることが多かった．例えば，資本利益率＝利益／資本，売上高利益率＝利益／売上高　等である．これでは経営の一部の面しか見ることができないので，いくつかの比率を対比させ，また複数の事業体（DMU）の値を比較して総合的な判定を行ってきた．それに対してDEAは多入力・多出力をもつ複数のDMU間の効率性の比較を多入力対多出力という一つの枠組みの中で行うことを可能にした．

2. 上の分数計画において見たように，DEAは多入力多出力系の事業体の効率性を比率尺度で相対比較するが，そのとき事業体$k(k = 1, \ldots, n)$に対して
$$\frac{\sum_{j=1}^{s} u_j y_{jk}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ik}}$$
という仮想入力対仮想出力の比を用いる．ここに，x_{ik} $(i = 1, \ldots, m)$は事業体kの入力値，y_{jk} $(j = 1, \ldots, s)$は出力値である．(v_i)，(u_j)は各入出力項目に対する重みであるが，それらを全DMUについて一通りに決めるのではなく—そうするとあるDMUにとって有利になったり，あるDMUにとって不利になったりすることがある—そのDMUにとって上の比率尺度が最も好ましい値になるように決める．そのため，重みはDMU毎に異なる値

を取る．このことにより，ある意味でフェアな重み付けができる．逆にDEAで非効率と判定されたDMUは他のどんな重み付けによっても非効率的である．

3. 多入力多出力系の事業体の効率性を比較することは非常に難しいことであるが，DEAはそれを0から1（最も優れたもの）までの間の数値に投影することに成功している．しかも，その数値は根拠が明確である．

4. 非効率的と判定されたDMUに対しては参照集合（reference set）が判明するので，比較或いは模範となるDMU群が明示される．また，[LP]の最適解λ^*の値は参照集合の中のDMUへの近さを教えてくれる．

5. 効率的なDMUについても，参照集合へ出現する回数を数えることによって，そのDMUが全体のDMUの中でどのような位置にあるかを知ることができる．もし，他のDMUによって一回も参照されていないような効率的DMUがあれば，それは孤立した（異種の）DMUである可能性が高い．

6. 技術的な効率値（θ^*）以外に，入力の余剰と出力の不足の所在を明らかにしてくれる．

7. 効率的なDMUの中には，ベンチマークになるものが見つかることがあり，それに近づくように努力目標ができる．

8. 仮想的に標準的DMUを作り，それを追加して解析することにより，相対評価を絶対評価に近づけることができる．

9. 一つの事業体の中でもいくつかの入出力関係がある．それらを別々に解析することによって，事業体の中のどの過程（機関）に非効率が存在するかを知ることができる．例えば，営業人数，営業所規模を入力とし，売上高，売上げシェアーを出力として，多数のDMUについてDEAを行えば，売上げ効率性を見ることができる．一方，売上高，売上げシェアーを入力とし，売上利益を出力として解析すれば売上げ利益効率性を見ることができる．この2つの効率値を比較検討することによりそのDMUの特徴を探求することができる．

10. BCCモデルによって，効率的なDMUの規模の収穫性を判定することができる．すなわち，増加型，一定型，減少型である．このようなDMU毎の規模の収穫性の判定はCobb-Douglas等の従来の生産関数によっては期待できなかったことである．

11. 入力変数と出力変数の間に特定の関数型—例えばCobb-Douglas型—を仮定しない．こういった生産関数と呼ばれるものはあくまでも人為的なものでありその真偽は多くの場合不明である．仮に統計的検定によって否定されなかったとしても，他の関数が否定されないという可能性も残される．それに対して，DEAは特定の関数型を仮定せず，あくまでも「データ自身に語らせる」という立場を取る．すなわち，ノンパラメトリックな手法である．

12. DEAに対して統計的手法として最小2乗法（OLS），修正最小2乗法（COLS），確率的フロンティア分析（Stochastic Frontier Analysis: SFA）がある．これらの手法は，全データに唯一の式を最小2乗原理であてはめたり（OLS），それを平行移動させてフロンティア分析を行ったり（COLS）([3])，各DMUにデータ誤差と非効率性を想定してそれらの値を統計的手法で分離する（SFA）([2])といった方針を取っているが，いずれも最小2乗原理で中心的（平均的）なデータの特性を把握することから始まっている．それに対してDEAはフロンティア解析を直接対象とする．DEAでは非効率的なDMUは効率的フロンティアの形成になんら関与しないが，統計的手法では，通常，全データが効率的フロンティアの形成に影響を与える．

5 限界と批判

DEAに対する批判の代表的なものを次にあげる．

1. 入力変数間或いは出力変数間の代替可能性を仮定しているが，その前提は常に正しいか．

2. 入力変数間或いは出力変数の中にはその問題の当事者にとって非常に重要なものと，そうでもないものが同居していることがある．しかも，DEAはそれらを平等のものとして取り扱う．すなわち，評価に対する寄与は平等である．入力の変数の中に比較的重要でないものがあって，あるDMUがその値が小さいために効率的と判定されることもあ

る．このことは，現実的な感覚からすればおかしいのではないか．

3. 変数の選び方や増減によって効率値（θ^*）が変化するので，客観的な評価がむずかしい．(変数を増やせば効率値は非減少.)

4. DMU の集合の決め方によって効率値が変化するので，DMU の範囲を決めることが難しい．

5. どの DEA モデルを使うかによって効率値が異なる．CCR モデルで非常に低い効率値をもつ DMU が，BCC モデルでは高い効率値をもつことがある．どれを採用すればいいか迷う．

6. DEA から得られる改善案がそのまま実行可能であるとは限らない．

7. データにエラーが入っているとき，敏感に響く．(効率的 DMU のデータエラーは他の DMU の効率値に大きな影響を与える.)

8. 効率性（efficiency）と，有効性（effectiveness）或いは収益性（profitability）は違う．効率がよいことと収益がよいことは必ずしも一致しない．

6 DEA を用いる際の注意事項

以上の DEA の利点，限界及び批判を承けてマネジメントのツールとして用いる際の注意事項を述べる．

1. 入力変数と出力変数は直接または間接に関連しているものでなければならない．全く無関係と思われる入，出力間の解析は意味がない．また，相対的に，少ない入力で大きい出力を産出する DMU 程効率的と判定するので，入力変数や出力変数をその方針に沿って準備する必要がある．

2. 入力（出力）変数間の代替性というのは，例えば，ある店が従業員４０名，売り場面積２００平方メートルで１億円の売り上げがあり，別の店が従業員２０名，売り場面積３００平方メートルで１億円の売り上げがあるとき，その中間の従業員３０名，売り場面積２５０平方メートルの店でも１億円の売り上げが可能であるということを意味する．このことは，上の生産可能集合の定義に含まれていることである．この仮定が成立しないような場合には，別のモデルを使う必要がある．例えば，Free Disposal Hull (FDH) model([4]) 等である．

3. 変数選択の問題では，先ず，最も重要な入，出力変数を用いて DEA の計算を行う．そのため，分析に先立って，入力（出力）変数間の相関係数を求め，相関の高い変数群からは代表的なものを採用する．それから，次に重要と思われる変数を追加して再び DEA の計算を行う．一般に，各 DMU の効率値 θ^* は大きくなる（非減少）であるが，その変化の度合いを見ると，大きく影響される DMU と小さい変化しか受けない DMU がある．追加した変数に大きな重みがついているものは効率値 θ^* の変化が一般に大である．そして元からある変数の重みが小さくなってしまうことがある．このように，変数を増減させながら，効率値の変化を観察し，その原因を調べるとともに，どの範囲までの変数を採用するかについて，当事者のコンセンサスを得る必要がある．更に，重要な変数とそうでない変数の間に重みの差を付けたいような場合には，領域限定法等を用いれば当事者の理解が得られ易い．いずれにせよ，変数の増減は感度分析という立場からもいろいろ実験的にやってみて，それぞれの変数の影響を調べた上で，最終的な変数選定に達する場合が多い．そのような意味でも，DEA は実地踏査的（exploratory）な手法である．

4. DEA のために採用する DMU の範囲についても，当事者のコンセンサスを得なければならない．ある DMU が入っているために，他の DMU の効率値が異様に小さくなっているような場合には，その DMU を外して再計算してみるのも一策である．その他，DEA に先立って，クラスター分析等により DMU 群をクラス分けすることも有効である．

5. ベンチマーク或いはスタンダードと思われる仮想的な DMU を作って，DMU 群に加え，再計算して見ることは有意義である．

6. 生産可能集合の形状については，CCR，BCC，対数型等のモデルを各種適用してみて，当事者の意見や判断を参考にして決める．一般に CCR モデルの効率値と BCC モデルのそれが大きく食い違うことが多い．BCC モデルでは，どの入力変数でも最小の値をもつ DMU は効率的となり，どの

出力変数でも最大の値をもつDMUは効率的となる．これがCCRモデルの値との食い違いの大きな原因である．BCCモデルによる規模の収穫性の判定では，多くの場合，小規模のDMUは増加型に属する．このことは規模の拡大や合併によってより効率的になる可能性があることを示唆している．また，大規模DMUで規模の収穫が減少型のものは分割等によって効率が向上する可能性があることを示している．BCCモデルで効率的（$\theta^*=1$）なDMUでも，規模の収穫性という観点からは改善の余地を残しているものが多い．

7. DEAによる改善案はあくまでも一案である．その実行可能性については十分検討しなければならない．また，改善案を参考にして準改善案を作成し，それをDMUとして用いて，効率値や入力余剰，出力不足の変化を考察することも有意義である．

8. データに含まれているエラーはDEAの計算結果に大きな影響を与える．特に，効率的なDMUのデータエラーは他のDMUの効率値に直接関係するので注意しなければならない．この点，他の統計的な手法—回帰分析等—よりも厳しい立場にある．確率的DEAの手法を用いて解析する方法もあるが，まだ確立された手法とは言い難い．一度DEAを解いてから，効率的と判定されたDMUにつきデータを精査したり，データを変動させてみてその影響を調べることが現実的な対応策である．

9. 効率性と有効性，収益性との違いについては公企業と民間企業で立場が異なる．DEAはそもそも非営利機関（not-for-profit organizations）の効率性を測定するための方法として開発されたという歴史的経緯があることに先ず注意したい ([1])．営利企業のコスト効率性や利益効率性の測定はいわゆるアロケーションモデルを用いて行うことができる ([8], [6])．

7　おわりに

DEAの研究は近年各方面で活発に進められている．また，事例も多分野で見られるようになった．技術管理，医療機関の評価，管理会計，金融等これまで数理計画と縁が薄かった分野でも盛んに用いられている．しかしながら，この手法を十分に使いこなすには，数理計画法—ＬＰ，双対性，強相補性等—に対する理解が必要であり，この辺が普及のカギとなるであろう．また，DEAは双対性が極めて明確な意味をもつという点で興味深い手法である．DEAを使いながら，現象に対する知見と手法に対する理解を深めて行くことが近道であろうか．最近の事例として，昨年の秋広島大学で行われたＲＡＭＰシンポジウムで発表された北村，筒井[5]による日米電力産業の比較は，興味ある実証研究として注目を集めている．今後このような研究が多方面でなされることを切望する次第である．

参考文献

[1] Charnes, A., W.W. Cooper and E. Rhodes, "Measuring Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research*, 1, 429-444, 1978.

[2] Fried, H.O., Lovell C.A.K. and Schmidt, S.S. (eds), *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, Oxford University Press, 1993.

[3] Richmond, J., "Estimating the Efficiency of Production", *International Economic Review*, 15, 515-521, 1971.

[4] Tulkens, H. and Eeckaut, P.V. , "Non-parametric Efficiency, Progress and Regress Measures for Panel Data: Methodological Aspects", *European Journal of Operational Research*, 80, 474-499, 1995.

[5] 北村，筒井，"日米電気事業の生産効率性およびコスト効率性比較"，第９回ＲＡＭＰシンポジウム論文集，164-177, 1997.

[6] 末吉俊幸, "DEAによる効率性分析に関する一考察", オペレーションズ・リサーチ,35,167-173,1990.

[7] 末吉俊幸, "最小絶対値法による回帰分析", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 40, 261-274, 1997.

[8] 刀根　薫,「経営効率性の測定と改善」, 日科技連, 1993.