数理計画モデル分析と基礎的定式化技法

大山　達雄

1.　数理計画モデル分析

システムはいくつかの構成要素からなり、それらがお互いに相互関係を有し、何らかの目的のために機能しているものであるといえる。与えられたシステムに対して、解決すべき何らかの問題が提起されたとしよう。現実のシステムそのものではそれぞれのシステムの状況も異なるし、またシステム自体の構成要素間の相互関係もわれわれにとって分析、処理が困難な場合がほとんどである。そこでシステムの構成要素とそれらの相互関係を、たとえば数式を用いて数学的に表現した数学モデルを構築し、その中でモデルの解を得ることによってシステムの処理、操作を考える。われわれの対象とするシステムにおいて、たとえば利益を最大にする、費用を最小にする、効率を最大にする、というように何らかの評価基準を最適にしようという一種の目的を有する数学モデルは最適化モデル、あるいはより一般的に数理計画モデルと呼ばれる。数学モデルが現実のシステムをもう一つの別な形に表現したものである以上、モデルの構築に際しては、システムの構造、特性ができるだけ正確かつ厳密に表現されることが必要である。システムに関する多くのデータも何らかの形で考慮されなければならない。たとえばエネルギーシステムにおけるエネルギー変換効率、原燃料としての原油、石炭、天然ガスなどの燃料単価、将来需要などはすべて対応する数学モデルの中で何らかの形で用いられる数値であって、これらが数学モデルのための入力データとなる。システムに対応する数学モデルが構築され、入力データが用意されると、次はモデルの解を求めるという操作が必要となる。この操作は一般にモデルを解くと呼ばれるが、より具体的には、数式の形で表された最適化問題の最適解を求める場合、コンピュータによって数学モデルで表された変数の変動の様子を模擬的に調べる場合、などいくつかの異なる場合が考えられる。数学モデルが現実のシステムを厳密な意味で正確に表しているとは限らない以上、われわれはモデルの妥当性、適合性、整合性を何らかの方法でチェックする必要もあるし、またモデルの解が得られたとしても、入力データの変動によってモデルの解がどのように変化するかといった解の安定性、信頼性の分析、いわゆる感度分析と呼ばれるモデルのフィードバック操作を綿密に実施する必要がある。数理計画モデルの構築から始まってモデルの最適解を求め、その結果を分析するまでの一連の操作が数理計画モデル分析である。システムに対する問題提起から、モデル分析によって何らかの解を得、それをシステムに対する解決策として意思決定をするまでの操作を模式的に図示すると、図1のようになる。

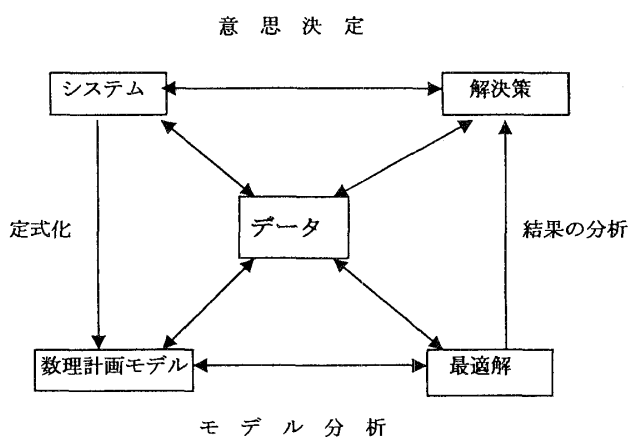

図1

おおやま　たつお
政策研究大学院大学政策研究科
〒338 浦和市下大久保255

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

2. 基礎的定式化技法

モデルを構築する場合の定式化技法として、線形計画、非線形計画、動的計画の各種モデル等、非常に多くのものが提案され、実施されてきている。本稿ではこれらの技法については述べないが、定式化の基本事項である線形性と非線形性、静態性と動態性、特殊な種類の制約について、それぞれの例を紹介することにする。モデルの変数に関連するものとして、任意の非線形関数を線形化する方法、そしてモデルの定式化に関連するものとして、論理制約を定式化する方法、動的問題を静的問題に変換する方法を紹介する。

非線形関数の線形化

0-1型整数変数を用いると、非常に広範囲の定式化が可能となる。いま図2のような区分線形関数が与えられたとしよう。区間$I = \{x \mid 0 \leq x \leq 13\}$を$I_1 = \{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$, $I_2 = \{x \mid 3 < x \leq 9\}$, $I_3 = \{x \mid 9 < x \leq 13\}$の3つの区間に分割するとき、図2に示す$x$とその関数$y = f(x)$は、新しい変数$x_1, x_2, x_3$を用いて次のように表すことができる。

$$y = f(x) = 3x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 \quad (1)$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \quad (2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 4 \quad (3)$$

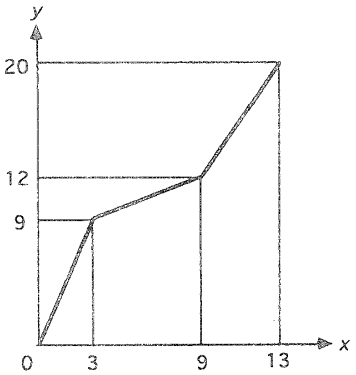

図2

しかしながら上の(1)-(3)で与えられる定式化において、新しい変数x_1, x_2, x_3の値を任意に定めることはできない。たとえば$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$という組合せに対しては、(1),(2)に基くと$x = 10$, $y = 16$となるが、図2のように与えられた区分線形関数においては、$x = 10$のときのyの値は$y = 14$であるので、正しく得られない。すなわち上の定式化において、次の(a),(b)が満たされねばならない。

(a) $x_2 > 0$ならば、$x_1 = 3$ (区間I_1の上界値)

(b) $x_3 > 0$ならば、$x_1 = 3$, $x_2 = 6$ (それぞれ区間I_1, I_2の上界値)

そこで0-1型整数変数$z_1, z_2 \in \{0, 1\}$を用いて、以下のような定式化を行なう。

$$3z_1 \leq x_1 \leq 3 \quad (4)$$

$$6z_2 \leq x_2 \leq 6z_1 \quad (5)$$

$$0 \leq x_3 \leq 4z_2 \quad (6)$$

$$z_1, z_2 \in \{0, 1\} \quad (7)$$

式(4)-(7)の下では、以下が成立する。

(a) $z_1 = z_2 = 0$のとき、$0 \leq x_1 \leq 3$, $x_2 = x_3 = 0$より、$x \in I_1$

(b) $z_1 = 1, z_2 = 0$のとき、$x_1 = 3, 0 \leq x_2 \leq 6$, $x_3 = 0$より、$x \in I_2$

(c) $z_1 = z_2 = 1$のとき、$x_1 = 3, x_2 = 6$, $0 \leq x_3 \leq 4$より、$x \in I_3$

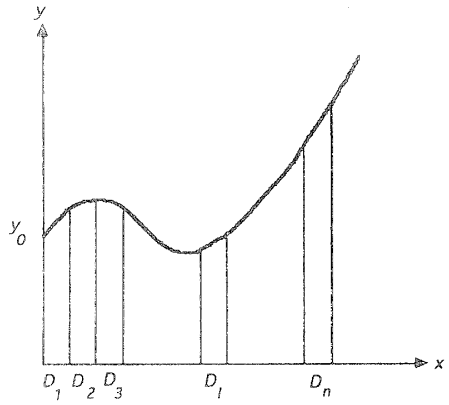

図3

一般に図3のような非線形関数を、n個の区間分割に基く区分線形関数によって近似的に表してみよう。それぞれの区間$i \in N = \{1, 2, \cdots, n\}$の幅を$D_i$, その区間内の折線の勾配を$s_i$とすると、変数$x$と$y$の間の関数$y = g(x)$は次のように表すことができる。

$$y = g(x) = \sum_{i \in N} s_i x_i + y_0 \quad (8)$$

$$x = \sum_{i \in N} x_i \quad (9)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$$0 \le x_i \le D_i, \quad i \in N \tag{10}$$

ここで0-1型整数変数$\{z_i \mid i \in N\}$を用いると、(8)-(10)の表現は次のように書くことができる。

$$D_i z_i \le x_i \le D_i z_{i-1} \quad i \in N \tag{11}$$

$$z_0 = 1, z_i \in \{0,1\}, \quad i \in N \tag{12}$$

以上から、任意の非線形関数は、n個の区間に分割した区分線形関数として、$n-1$個の0-1型整数変数を用いて近似的に表すことができる。つまりどのような非線形関数に対しても、区間分割を細かくすると、与えられた非線形関数を高精度で近似できることになる。

論理制約の定式化

いまx_1−x_2平面上に図4に示すような3つの領域S_1, S_2, S_3が$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid 3x_1 + 5x_2 \le 15,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$, $S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \le 4,\ 3x_1 + x_2 \ge 19,\ x_1 - x_2 \le 5\}$, $S_3 = \{(x_1, x_2) \mid -x_1 + 5x_2 \ge 25,\ 3x_1 + 2x_2 \le 27,\ -4x_1 + 3x_2 \le 15\}$のように与えられているとする。

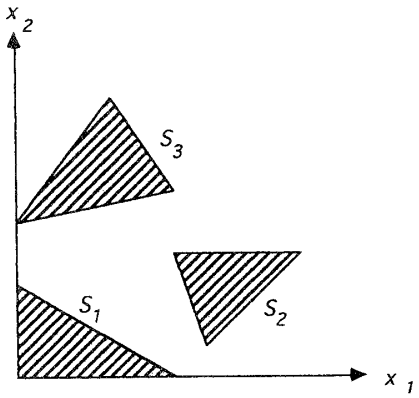

図4

このとき点(x_1, x_2)は領域S_1, S_2, S_3のうちの少なくとも一つの中になければならないとする。このような論理制約は0-1型整数変数z_1, z_2, z_3と大きな数Kを用いて以下のように表すことができる。

$$\text{領域}S_1 \ : \ \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - Kz_1 \le 15 \\ x_1 + Kz_1 \ge 0 \\ x_2 + Kz_1 \ge 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{領域}S_2 \ : \ \begin{cases} x_2 - Kz_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 + Kz_2 \ge 19 \\ x_1 - x_2 - Kz_2 \le 5 \end{cases} \tag{14}$$

$$\text{領域}S_3 \ : \ \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + Kz_3 \ge 25 \\ 3x_1 + 2x_2 - Kz_3 \le 27 \\ -4x_1 + 3x_2 - Kz_3 \le 15 \end{cases} \tag{15}$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \le 2, z_1, z_2, z_3 \in \{0,1\} \tag{16}$$

上の定式化において、$z_1 = 0$ならば$(x_1, x_2) \in S_1$を表し、$z_2 = 0$ならば$(x_1, x_2) \in S_2$を表し、そして$z_3 = 0$ならば$(x_1, x_2) \in S_3$を表す。したがって(16)が満たされているということは、0-1型整数変数z_1, z_2, z_3のうち少なくとも一つが0となれば、それはすべてが1とはならないことを意味するので、点(x_1, x_2)は領域S_1, S_2, S_3のうちのいずれかの中にあることになる。

より一般的に、多変数関数$f_i(x_1, ..., x_n), i \in M = \{1, \cdots, m\}$を用いて、$m$本の制約条件が次のように与えられているとする。

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) \le b_i \quad i \in M \tag{17}$$

このとき"m本の制約条件のうちの少なくともk本を満たさなければならない"という論理制約は、0-1型整数変数$\{z_i \mid i \in M\}$を用いて

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) - K(1 - z_i) \le b_i \quad i \in M \tag{18}$$

$$\sum_{i \in M} z_i \ge k \tag{19}$$

$$z_i \in \{0,1\}, \ i \in M; \quad K : \text{大きな数} \tag{20}$$

のように定式化できる。

上に示した論理制約条件は、たとえば製造工場などの生産システムにおいて、品質管理に関する何種類かの検査項目が満たされなければならないという生産方式を決定する場合などにも適用できる。

動的問題の静的問題への変換

ネットワークフロー最適化問題のうち、次のような動的フロー最適化問題を考えてみよう。図5に示すようなネットワーク$N = (V, E)$の頂点集合、枝集合をそれぞれ$V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(i, j) \mid i \in V, j \in V\}$として、枝$(i, j)$上の数値$(c_{ij}, a_{ij})$はそれぞれ$c_{ij}$: 枝(i, j)の単位時間当たり容量、a_{ij} :枝(i, j)上の移動所要

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

時間を表す。総所要時間T内にソース1からシンク4へのフローの量を最大にするという動的ネットワークフロー問題を考える。

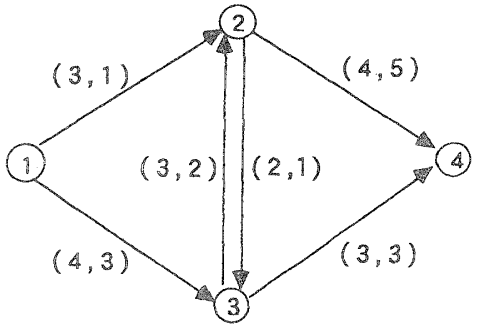

図5

与えられたネットワーク$N=(V,E)$に対して、図6のフローは、時刻0にソース1から頂点2, 3にそれぞれ3, 3, そして時刻1に同様に頂点2, 3にそれぞれ3, 3のフローを流した場合の時刻4における1つの実行可能フローを表す。

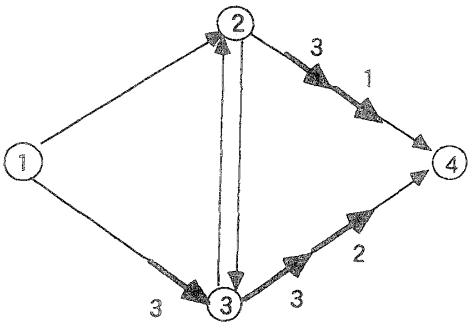

図6

ここで新たなネットワーク$N(T)=(V(T), E(T))$を次のようにして作成する。新たな頂点集合、枝集合はそれぞれ$V(T)=\{(i,t) \mid i \in V,\ t=0,1,\cdots,T\}$, $E=\{((i,t),\ (j,t+a_{ij})) \mid (i,j) \in E, i \in V, t=0,1,\cdots,T\}$となり、枝$((i,t),\ (j,t+a_{ij}))$の容量を$c_{ij}$とする。このときネットワーク$N=(V,E)$における動的フロー最適化問題は新たなネットワーク$N(T)=(V(T),\ E(T))$において、ソース頂点$\{(0,t),\ t=0,1,\cdots,T\}$からシンク頂点$\{(n,t),\ t=0,1,\cdots,T\}$への最大ネットワークフローを求める多ソース多シンク型静的フロー最適化問題となる。従って図5のネットワークにおいて、総所要時間$T=7$の場合の最適動的フローを求める問題は図7に示すネットワークにおいてソースからシンクへのフローの量を最大にする問題となる。したがってこの場合の最適フローは、図7に示すように値12のフローとなる。この方法の詳細については、参考文献[1], p.142を参照されたい。

3. モデルの操作と感度分析

数理計画モデル分析において、最適解自体が非常に重要な意味を持つことは当然である。またモデルで得られた最適解を現実のシステムに対する"最適な"意思決定として実施に移すという操作がそれほど容易でない場合があることも事実である。つまりわれわれの得た最適解が数学モデルとしての最適化問題に対する最適解

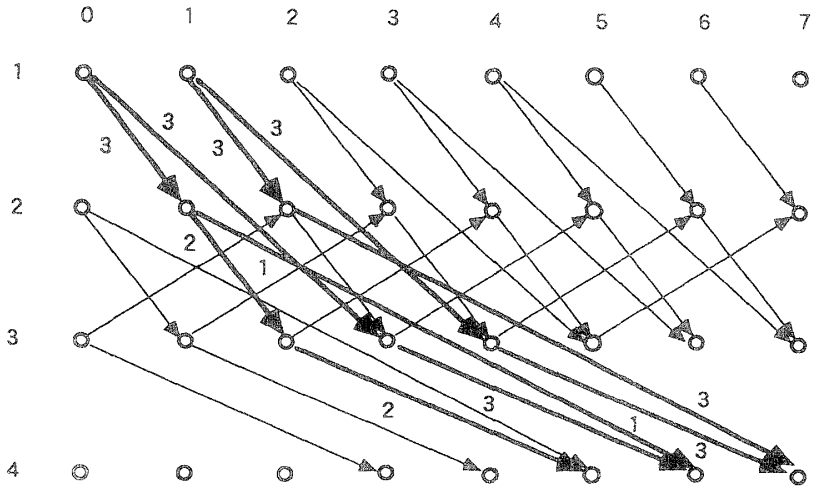

図7

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

である以上、それがいかに厳密に得られたものであったとしても、現実のシステムに適用する場合には、何らかの修正、補正が必要である。モデル分析においては、モデルの解を得るということだけを目的とすべきではなく、モデルを十分に操作、駆使することによって、モデルから得られる情報を現実のシステムと関連させ、さらに詳細な分析を加えることが重要である。そのためにもわれわれの構築する数学モデルは、単にできるだけ厳密、詳細にというのではなく、むしろある程度単純であっても、システムとの十分な整合性がとれているという条件の下で、十分な操作性を有することが必要である。数学モデルの構造が決定された後には、モデルを解くのに必要とされる、できるだけ信頼度の高い入力データを準備しなければならない。このようなデータ収集作業には、やはりシステム自体を綿密に多方面から分析する作業が必要となる。モデルの構築、データの収集作業に際してシステムを詳細に観察、把握すると、これまで気づかなかったシステムの新たな側面が見出されることもある。モデル分析は、時として、数学モデルを解いて最適解を得ることに相当する程度に重要な情報、知見をわれわれに与えてくれる場合があるということは非常に興味深いことである。

4. 数理計画モデル分析の課題と将来展望

数理計画モデル分析の実施に当たっては、たとえば古典的、代表的な数理計画問題としての施設配置問題の場合のように、変数、制約条件の数がそれぞれ何千、何万にも及ぶ巨大規模のモデルのため、データ入手可能性と信頼性、そして最適解を求める方法に関する問題点が存在することがある。今後はこのような問題に対してもメインフレームコンピュータによって解くというのではなく、より動的に、そしていろいろな状況に応じて、あるいは対話型としてパソコンレベルで容易に解けることが必要である。ただ単に現実の状況を忠実にモデル化するというのではなく、たとえば問題の多階層化あるいは分割化といった工夫、さらには階層化、分割化の後にそれらをどのようにして整合的に連結、結合すればよいかという処理方法の開発なども必要となるであろう。このようなことが可能となれば、実際に解ける問題の範囲がかなり拡大することは事実である。

数理計画手法の適用という観点からしてあまり多くの分析がこれまでには行われていない分野は大きく３つに分かれるようである。第１は非常に自然に近いとされる天然資源、環境などに関する分野である。自然現象の非線形性に伴う複雑さがＯＲ手法に基づくモデル分析を非常に困難にしているといえる。非線形性を扱ったモデル分析がそれほど普及していない現在では、この分野における分析が一般的に普及するにはもう少しの時間が必要であろう。第２は逆に全く人間の行動、組織そのものあるいはそれに近いとされる行政、組織、政治などの分野である。人間行動が古くから”平均人”として統計的にしか捉えられなく、人間の価値観、感情、意思、行動自体にあまり関心が向けられなかったことにもよるのであろう。第３は第１と第２の中間ともいうべき、あるいはこれらが混合した分野ともいうべき災害、危機管理といった分野である。地震、台風、大雨等の自然災害、天災に突然見舞われる場合、あるいはテロ、爆弾、事故といった突発的な緊急事態にどのように対応すればよいかという問題である。こういった分野に数理計画手法の適用の将来性があるような気がする。これからもより多くの人々によって、より広範に、より積極的に、数理計画モデルが新たな理論と手法の開発を得つつ、新たな応用分野に適用されることを期待したい。

参考文献

[1] Ford, L.R. and D.R. Fulkerson (1962). *Flows in Networks*, Princeton University Press, USA. [2] Bradley, S.P., A.C. Hax and T.L. Magnanti (1977). *Applied Mathematical Programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 716p. [3] 大山達雄, 1993. 「最適化モデル分析」, 日科技連出版, 372p. [4] 大山達雄, 1995. ”数理計画モデル分析の概要と実際”, 数理計画モデルの応用ー構築と解法と分析ー, 第２回ＯＲセミナーテキスト, 日本ＯＲ学会, pp.1-13.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.