教養講座

確率モデルとその応用III

尾崎　俊治

3. 確率過程

3.1 二項過程

第1回，第2回で確率を定義し，いろいろな分布とその性質について議論した．今回は時間の変化に従って確率法則が定まるような現象について述べよう．

最も簡単な例として，単位時間ごとにコインを投げて表の出る回数を数える試行を考える．この試行は何回でも続けることができる．試行の回数を時刻と考えれば，各時刻 t における表の出る回数 $N(t)$ を確率変数とする確率過程と考えられる．一般に，離散形あるいは連続形時刻 $t\ (\geq 0)$ における確率法則が確率変数 $X(t)$ で表されるとき，確率変数の集まり $\{X(t),\ t \geq 0\}$ は**確率過程** (stochastic process) とよばれる．例えば，ある店に到着する客の数，交通事故の発生件数，株式市場における株価の変動，ある個体の生存数の変化，騒音レベル，不規則振動の変動などは確率過程の例である．

もし時間 $t\ (\geq 0)$ が可算な集合 $t = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$（あるいは単位時間の倍数）ならば，確率過程は**離散形時間確率過程** (discrete-time stochastic process) という．一方，時間 $t\ (\geq 0)$ が連続形ならば，この場合は**連続形時間確率過程** (continuous-time stochastic process) という．

$X(t)$ の取る値の集合は**状態空間** (state space) とよばれる．状態空間も離散形と連続形に分類できる．ここでは状態空間は離散形のみを取り扱う．

確率過程 $\{X(t),\ t \geq 0\}$ に共通した確率変数 $X(t)$ の一般的性質から述べよう．任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対し，確率変数

$$X(t_1) - X(t_0),\ X(t_2) - X(t_1),\ \cdots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

が独立ならば，この過程は**独立増分** (independent increments) をもつという．ここで，$X(t_k) - X(t_{k-1})$ は**増分** (increment) とよばれる．

任意の $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ および任意の $h > 0$ に対し，確率変数の組 $(X(t_1+h), X(t_2+h),\ \cdots, X(t_n+h))$ の同時分布が $(X(t_1), X(t_2),\ \cdots, X(t_n))$ の同時分布と等しいならば，この過程は**定常増分**（stationary increments）をもつという．あるいはこの過程は**強定常過程**（strongly stationary process）とよばれる．

独立増分および定常増分をもつ確率過程 $\{X(t),\ t \geq 0\}$ は**定常独立増分** (stationary independent increments) をもつという．この場合，上述の独立増分の条件と，任意の $t_1 < t_2$ および $h > 0$ に対し，増分 $X(t_2+h) - X(t_1+h)$ と $X(t_2) - X(t_1)$ の同時分布が等しくなるという条件をつけ加えればよい．

さて，ある店に到着する客の数，交通事故の発生件数，計数管に記録される粒子の数，部品の故障数などはすべて数（整数）を数える確率過程である．このような確率過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ を特に**計数過程** (counting process) とよぶ．ここで述べる二項過程，ポアソン過程はいずれも計数過程である．

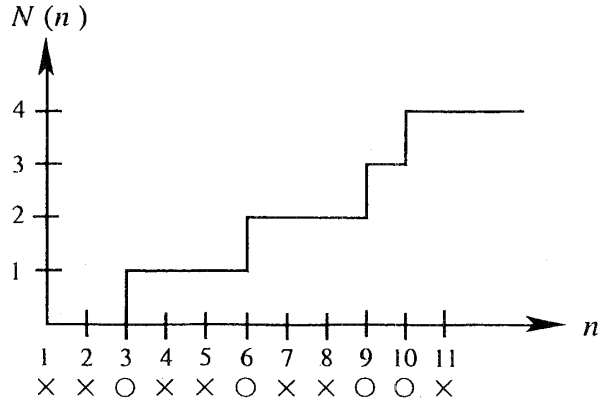

図 3.1 二項過程の標本関数（○：成功，×：失敗）

前節で述べたコインを投げ続ける確率過程を考え

おさき　しゅんじ　広島大学工学部
〒 739-8527 東広島市鏡山 1-4-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

よう．この確率過程は離散形時間確率過程であり，簡単のために単位時間を1とする．すなわち，時間$n=1,2,\cdots$におけるベルヌーイ試行列を考える．

定義 3.1 離散形時間確率過程$\{N(n),\ n=1,2,\ \cdots\}$において成功の確率$p$ $(0<p<1)$のベルヌーイ試行列を考える．$N(1)=0$として，時刻nにおける成功の事象の回数を$N(n)$（確率変数）とすれば，この確率過程はパラメータpの**二項過程** (binomial process) とよぶ．

前回の2.3.1で述べたようにベルヌーイ試行は各試行は独立で成功の確率pが一定である．図3.1に二項過程の標本関数を示す．この事実から次のことが言える．

1. **独立増分** ベルヌーイ試行の定義から明らかに二項過程は独立増分をもつ．

2. **定常増分** 任意の区間$[n_1, n_1+n]$で成功の事象が起こる確率は区間の長さnにのみ依存し，n_1とは独立である．

したがって，二項過程は定常独立増分をもつ．$n=1$から数えて初めて成功するまでの時間は

$$(1-p)^{n-1}p \qquad (n=1,2,\ \cdots)$$

となる幾何分布にしたがい，そして，区間$[0,n]$でk回成功する確率は

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=1,2,\ \cdots,n)$$

となる二項分布にしたがう．

以上述べたように二項過程は定常独立増分をもつので，任意の時刻を時間原点としてもよく，しかもその確率法則は時間差のみに依存し，どの時点をとっても同じである．すなわち，二項過程は離散形時間でランダムに生起する現象（ベルヌーイ試行列）を数学的に定式化したものである．

二項過程の極限を考えよう．時刻nを固定して，$n\Delta t=t$としよう．Δtを単位時間と考えれば，ある連続時間区間$[0,t]$をn等分した二項過程において，

$$p=\lambda\Delta t$$

とする．ここで，λは単位時間当りの成功の生起する割合としよう．この過程は定常独立増分をもつことに注意すれば，初めて成功するまで回数の極限は

$$(1-p)^{n-1}p=\lambda\Delta t\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-1}\to\lambda e^{-\lambda t}\Delta t$$

となる指数分布の密度になる．さて，ベルヌーイ試行において初めてk回の成功が起こるまでの試行回数nは負の二項分布（前回の2.3.4参照）にしたがうから

$$p_X(n)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$(x=k,k+1,\ \cdots)$$

となる．上記と同様に$p=\lambda\Delta t$として，$n\to\infty$とすれば

$$\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{(k-1)!}$$

$$\times(\lambda t)^{k-1}\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}\lambda\Delta t$$

$$\to\frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}e^{-\lambda t}}{(k-1)!}\Delta t$$

となるパラメータλおよびkのガンマ分布（前回の2.4.2参照）にしたがう．

一方，区間$[0,t]$でk回成功する確率の極限は$n\to\infty$のとき

$$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

$$\times(\lambda t)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}$$

$$\to\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

となるパラメータλtのポアソン分布にしたがう．

以上述べたように二項過程は離散形時間上で起こるランダムな現象を記述する確率過程であり，定常独立増分をもつ．

そして，初めて成功するまでの回数は幾何分布（その極限は指数分布），k回目の成功までの回数は負の二項分布（その極限はガンマ分布）となる．一方，区間$[0,t]$でk回成功する確率は二項分布（その極限はポアソン分布）にしたがう．

次節で述べるポアソン過程は連続形時間上で起こるランダムな現象を記述する確率過程であり，二項過程の極限と考えてもよい．

3.2 ポアソン過程

この節では離散形時間上の二項過程を連続形時間上の対応する確率に置き換えた**ポアソン過程** (Poisson process) について議論する．連続形時間上の計数過程$\{N(t),\ t\geq 0\}$を考える．ここで，$N(t)$は時刻t

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

までの事象の数（例えば，客の到着数，ジョブの到着数など）を表す．

まず，次の記号を定義する．

定義 3.2 任意の関数 $f(h)$ は

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$$

ならば $o(h)$（スモール・オー・エイチ）であるという．

定義 3.3 計数過程 $\{N(t),\ t\geq 0\}$ は次の条件

(i) $N(0)=0$

(ii) 過程は定常独立増分をもつ

(iii) $P\{N(h)=1\}=\lambda h+o(h)$

(iv) $P\{N(h)\geq 2\}=o(h)$

を満たすならば，パラメータ λ のポアソン過程とよばれる．

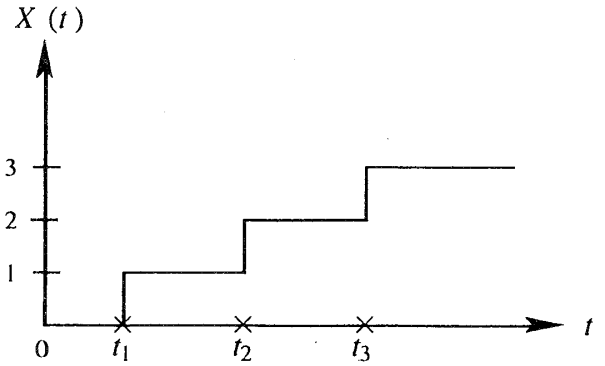

図 3.2 ポアソン過程の標本関数

ポアソン過程は図 3.2 に示すような計数過程である．定常独立増分をもつ過程であるので，時間区間 $(0,\ t]$ において k 個の事象の起こる確率

$$P_k(t)=P\{N(t)=k|\ N(0)=0\}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を定義する．この確率を用いれば，任意の時間区間 $(s,\ s+t]$ において k 個の事象の起こる確率は

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=P_k(t)$$

となり，時刻 s と独立となる．

固定した時間 t に対して，

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1$$

となるから，$P_k(t)$ は k に関する確率関数になっていることに注意しよう．

定義 3.3 の (ii),(iii),(iv) から

$$P\{N(t+h)-N(t)=k|N(t)=i\}$$
$$=\begin{cases}1-\lambda h+o(h) & (k=i)\\ \lambda h+o(h) & (k=i+1)\\ o(h) & (k>i+1)\end{cases}$$

となる．$P_k(t+h)$ は時間区間 $(0,\ t]$, $(t,\ t+h]$ で独立となるから，$P_0(t+h)$ については

$$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)$$
$$=P_0(t)[1-\lambda h+o(h)]$$

となり，$P_k(t+h)$ については

$$P_k(t+h)=P_{k-1}(t)[\lambda h+o(h)]$$
$$+P_k(t)[1-\lambda h+o(h)]+\sum_{i=2}^{k}P_{k-i}(t)o(h)$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる．これらの式の両辺を整理して，$h\to 0$ とすれば，$P_k(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)$$
$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-\lambda P_k(t),\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

を得る．初期条件 $P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1$ および $P_k(0)=P\{N(0)=k\}=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ を用いて解けば，

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},\quad P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$$

となる．一般に，

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．これはパラメータ λt のポアソン分布である．$P_k(t)$ がポアソン分布になることは厳密に証明するためには数学的帰納法あるいは母関数を用いなければならない．

ポアソン過程はランダムに起こる現象をモデル化したものである．したがって，どの時刻をとっても独立となり（独立増分），時間区間 $(s,\ s+t]$ での確率法則は時間差 t のみに依存して，起点の時刻 s と独立となる（定常増分）．次節ではこのポアソン過程の事象が起こるまでの確率法則について議論する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3.3 ポアソン過程の到着時間間隔分布

前節において，ポアソン過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ の確率変数 $N(t)$ について議論した．この節では，ポアソン過程における事象が起こる時間間隔に着目しよう．

定義 3.4 計数過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ を考える．X_1は初めて事象が起こるまでの時間としよう．一般に，X_kは $(k-1)$ 番目から k番目の事象が起こるまでの時間とする．そのとき，$\{X_k,\ k = 1, 2, \cdots\}$ は到着時間 (interarrival time) 列とよばれる．さらに，S_kは時刻0から k番目の事象が起こるまでの時間とすれば

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

となる．ここで，$S_0 = 0$ とする．

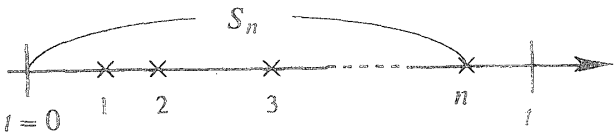

図 3.3 到着時間 $S_k \leq t$ と $N(t) \geq k$の関係

図 3.3 は到着時間 $X_1, X_2, \cdots, X_k$と k番目の事象が起こるまでの時間を図示したものである．

さて，X_1の分布は

$$P\{X_1 \leq t\} = 1 - P\{X_1 > t\}$$

$$= 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

となる．さらに，定常独立増分の事実から

$$P\{X_2 \leq t | X_1 = s\}$$

$$= 1 - P\{X_2 > t | X_1 = s\}$$

$$= 1 - P\{N(t+s) - N(s) = 0 | X_1 = s\}$$

$$= 1 - P\{N(t+s) - N(s) = 0\} \quad \text{(独立増分)}$$

$$= 1 - P\{N(t) = 0\} \quad \text{(定常増分)}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

となり，X_2の分布は X_1と独立でやはり指数分布にしたがう．当然，$X_3, X_4, \cdots$は独立で，指数分布にしたがう．

定理 3.1 パラメータ$\lambda > 0$のポアソン過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ において，到着時間 X_k $(k = 1, 2, \cdots)$ は独立で同一の平均 $1/\lambda$をもった指数分布にしたがう．

再生過程 は到着時間間隔 $X_1, X_2, \cdots$は独立で同一の一般分布 $F(t)$ にしたがう計数過程である．そこで，ポアソン過程は次のように定義してもよい．

定義 3.5 パラメータ$\lambda > 0$のポアソン過程 $\{N(t),\ t \geq 0\}$ は到着時間間隔分布が指数分布 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ にしたがう再生過程である．

k番目の事象が起こるまでの時間 $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$について考えよう．$X_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$ は独立で同一の指数分布にしたがうから，和の分布 S_kは例 2.14 で示したようにガンマ分布にしたがう（2.4.4 項参照）．すなわち，

$$P\{S_k \leq t\} = \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx$$

となる．

さて，図 3.3 に示したように，$S_k \leq t$ということは時刻 t までに k個の事象が起こっていることであるから，$N(t) \geq k$であることと同等である．

定理 3.2 パラメータ$\lambda > 0$のポアソン分布について，

$$P\{S_k \leq t\} = P\{N(t) \geq k\}$$

すなわち，

$$\int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

となる．あるいは，

$$P\{S_k > t\} = P\{N(t) < k\}$$

すなわち，

$$\int_t^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

となる．

上記の恒等式は部分積分を繰り返し実行することによって解析的に証明することもできる．しかし，ポアソン過程とガンマ分布の関係から直ちに恒等式を得ることができる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3.4 二項過程とポアソン過程の対比

二項過程はベルヌーイ試行列が続く確率過程であり，時間区間 $[0,t]$ を n 等分した二項過程において，

$$p=\lambda\Delta t$$

として，$n\to\infty$ とすれば，対応するポアソン過程が得られることを示した．

二項過程とポアソン過程について，上記で得た結果を対比しながら，まとめてみよう．初めて成功する（事象が起こる）までの試行回数（時刻）はそれぞれ幾何分布および指数分布にしたがう．もちろん，各到着時間列 $\{X_k,\ k=1,2,\cdots\}$ は独立でそれぞれパラメータ p の幾何分布およびパラメータ λ の指数分布にしたがう．

次に，初めて k 回成功する（事象が起こる）までの試行回数（時刻）はそれぞれ負の二項分布およびガンマ分布にしたがう．一方，試行回数 n の区間（時間区間 $[0,t]$）で k 回成功する（事象の起こる）確率はそれぞれ二項分布およびポアソン分布にしたがう．

次に，二項過程において試行回数 $n=1,2,\cdots$ において k 回成功する確率 $P_k(n)$ $(n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,n)$ を考えよう．初期条件を

$$P_0(0)=1,\qquad P_1(0)=0$$

と仮定する（ポアソン過程において $t=0$ のとき $N(0)=0$ に対応する）．

$$P_0(n+1)=(1-p)P_0(n)$$

$$P_k(n+1)=pP_{k-1}(n)+(1-p)P_k(n)\qquad(k\geq 1)$$

となるから，差分方程式

$$\Delta P_0(n)=P_0(n+1)-P_0(n)=-pP_0(n)$$

$$\begin{aligned}\Delta P_k(n)&=P_k(n+1)-P_k(n)\\&=pP_{k-1}(n)-pP_k(n)\qquad(k\geq 1)\end{aligned}$$

を得る．この差分方程式を解けば，

$$P_k(n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

となり，二項分布にしたがう．

さて，上記の差分方程式において，$p=\lambda\Delta t$ として，$n\to\infty$ $(\Delta t\to 0)$ とすれば，初期条件

$$P_0(0)=1,\qquad P_k(0)=0\qquad(k\geq 1)$$

の下での微分方程式

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=\lambda P_{k-1}(t)-\lambda P_k(t)\qquad(k\geq 1)$$

を得る．したがって，その解は

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

となるパラメータ λt のポアソン分布になる．

3.5 ポアソン過程の応用

3.5.1 部品補給問題

ある部品は決められた時間 T 毎にのみ補給するものとする．その部品は故障毎に直ちに新しい部品と取り換えるとする．部品の故障はパラメータ λ の指数分布にしたがって故障し，待機中は故障しないと仮定する．補給部品が不足する確率を p（例えば 1%，2%）以内にするには何個の部品を準備しなければならないか．

部品は指数分布にしたがって故障するから，時間区間 $[0,T]$ で k 個故障する確率はパラメータ λT のポアソン分布にしたがう．したがって，k 個以上の部品が $[0,T]$ で故障する確率が p より小さくなるため

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(\lambda T)^i}{i!}e^{-\lambda T}\leq p$$

あるいは

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(\lambda T)^i}{i!}e^{-\lambda T}\geq 1-p$$

を満たす自然数を求めればよい．

数値例として部品の平均故障時間 100 時間（$\lambda=0.01$/時間），$T=300$ 時間とする．$p=0.02$ (2%) ならば $k=8$ 個，$p=0.01$ (1%) ならば $k=9$ 個となる．不足の確率 2%以下にするためには $k=8$ 個，さらに安全を見込んで，不足の確率 1%以下にするためには $k=9$ 個補給すればよい．

3.5.2 最適化問題

ある部品はパラメータ λ のポアソン過程にしたがって到着する．予め決められた時間 T 毎にまとめて到着した部品を一括発送（処理）するとする．もし，時間区間 $[0,T]$ の途中で一括発送（処理）するとしたら，部

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

品の総平均待ち時間を最小にする途中の発送時間を決定しよう．

時間区間 $[0,T]$ でいくつかの部品が到着したときの総平均待ち時間を求めよう．簡単のために，時間区間 $[0,T]$ で1個の部品が到着したとする．当然その確率は $P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$ となる．そのとき，部品の到着時刻を x $(x<t)$ とすれば，その確率分は $\lambda e^{-\lambda t}dx$ となり，残りの時間 $(t-x)$ では部品が到着しない．したがって，

$$
\begin{aligned}
&dP\{X_1 \le x | N(t)=1\} \\
&\quad = \frac{dP\{X_1 \le x,\ X_1+X_2>t\}}{P\{N(t)=1\}} \\
&\quad = \frac{\lambda e^{-\lambda x}dx e^{-\lambda(t-x)}}{\lambda te^{-\lambda t}} \\
&\quad = \frac{dx}{t}
\end{aligned}
$$

となるから，$[0,t]$ 上の一様分布にしたがう．この事実を一般化すれば，n 個の部品が到着したとすれば，n 個それぞれが $[0,t]$ 上の一様分布からの順序統計量になることが知られている．

この事実を用いると，時間区間 $[0,t]$ で到着する平均部品数は λt であり，それぞれの平均待ち時間は $t/2$ である．したがって，時間区間 $[0,t]$ の総平均待ち時間は

$$\lambda t\frac{t}{2}=\frac{\lambda t^2}{2}$$

となる．

本題に戻って，時間区間 $[0,T]$ の途中の時刻 t で発送（処理）するとすれば，総平均待ち時間は

$$\frac{\lambda t^2}{2}+\frac{\lambda(T-t)^2}{2}$$

となるから，$t=T/2$ がこの総平均待ち時間を最小にする．すなわち，時間区間 $[0,T]$ の半分の所で発送（処理）すればよい．

3.5.3 $M/G/\infty$ 待ち行列

待ち行列理論はORの中でもよく知られた理論であり，多くの解析結果が知られている．待ち行列理論で教科書に記載されているほとんどのモデルは M/M 型待ち行列モデルである．ここで，M/M の最初の M は待ち行列の客がポアソン過程にしたがって到着することを表し，M/M の後の M はそのサービス時間が指数分布にしたがうことを表している（サービスは客がいるときのみであるから，ポアソン過程のように次から次へとサービスをするとは限らない）．M/M 型待ち行列モデルはマルコフ過程の中でよく知られた出生死滅過程によって定式化される．特に，極限確率は簡単な解析解となる．

さて，$M/G/\infty$ 待ち行列は到着はポアソン過程にしたがって到着し，そのサービス時間は一般分布 $G(t)$ $(t\ge 0)$ にしたがうとする．$M/G/\infty$ の ∞ はサービス窓口は無限大であることを表す．すなわち，到着した客は直ちに一般分布 $G(t)$ にしたがってサービスを受けるとする．現実にはこのような待ち行列は存在しないが，電話回線の近似モデルと考えてもよい．

さて，$M/G/\infty$ 待ち行列を考えよう．3.4.2で示したように，時間区間 $[0,t]$ で n 人の客が到着したとすれば，それぞれの客の到着は $[0,t]$ 上の一様分布にしたがっている順序統計量になる．そこで，$[0,t]$ でサービスの終了していない確率は

$$p=\int_0^t[1-G(t-x)]\frac{dx}{t}=\frac{1}{t}\int_0^t[1-G(t-x)]dx$$

となる．したがって，時刻 t で n 人のうち k 人がサービス中の（サービスが終了していない）確率は

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

となる．時刻 t までに客の到着する確率はポアソン過程にしたがうから，

$$
\begin{aligned}
&P\{\text{時刻 } t \text{ で } k \text{ 人がサービス中}\} \\
&\quad = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\
&\quad = \frac{(p\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}e^{-p\lambda t} \qquad (k=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}
$$

となり，ポアソン分布にしたがう．

特に，$M/M/\infty$ 待ち行列は $G(t)=1-e^{-\mu t}$ $(t\ge 0)$ と仮定したときであるから，

$$p=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu x}dx=\frac{1}{\mu t}(1-e^{-\mu t})$$

となるから，パラメータ

$$p\lambda t=\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$$

のポアソン分布となる．

紙面の都合で，参考文献は次回へ回す．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．