講座

AHPからANPへの諸問題 I

高橋　磐郎

1.　まえがき

AHP(Analytic Hierarchy Process)はORワーカーにとって今やまったくポピュラーなものになったと言える。刀根薫氏、真鍋氏等のわかりやすい解説書[1][2]も多く出ているし、この数年間のOR学会の研究発表会での発表も極めて多い。私自身もAHPについていくつかの研究論文を書いてみた。

こうして応用面ではともかく、論理面ではもう研究するべきことはなくなったかなと思った矢先、昨年夏のバンクーバーでのAHPのシンポジュウムに出席したとき、そこでANP(Analytic Network Process)関係の多くの研究発表を聞いて、AHPがすでにANPへと発展しつつあることを痛感させられた。

またそのとき、Saaty氏から出席者全員に御自身の著書「Analytic Network Process」[4]が配られたが、それを読んで、ここに多くの問題があることを知った。また後程特集でいくつか紹介されると思うが、木下氏の一連の論文などもANPの思想に近いものがある事が分かって来た。

良く考えてみるとこれらの基本には「評価」という問題が横たわっていることが分かってきたが、その基本は意外に単純な原則に基づいていることが見えてくる。以上のような経過をたどっていた頃丁度上田氏からのご依頼もあって、この講座をまとめてみることがORワーカーの皆様に多少とも参考になるのではないかと思った次第である。

講座としての特徴を考え、まずAHPの基本からはじめ、対数最小二乗法との関連、不完全情報の解析法、西澤氏がよく研究しておられるbinary問題とグラフ論的問題（これも特集で紹介される予定）、などAHPの諸問題を紹介し、その後上記のANP関連の問題を言及し、もし余裕があれば最近我々の研究室で研究しているAHPのデザイン問題に触れてみようと思う。

たかはし　いわろう　日本大学生産工学部
〒275 千葉県習志野市泉町1-2-1

2.　AHPとは

物理学や工学では、長さとか重さとか時間とかの物理量が基本尺度となるが、それらを測定すれば測定値として実数が得られる。こうして実数上で厳密な計算が行われ、そして得られた結論から設計や施行が行われる。しかし企業において、あるいは一般の社会においても、このような自然科学的過程で測定しきれない問題が一杯ある。それは「コンピュータの使いやすさ」であったり「従業員の能力評価」であったりするが、これらは上記のような自然科学的手段では計量不可能である。

このような問題に対しては、人間の直感的判断に頼らざるを得ないが、人間の直感というものは上記のような自然科学的計量に比べると主観的でいかにもあいまいであるかに思われがちである。しかし、人間の判断は無理な物理的測定などよりはるかに的確である場合も多い。AHPは、このような人間の判断をいかに合理的に総合化するかという問題に一応の解決を与えたと言える。

2.1　一対比較の原則

AHPの第一の特徴は、評価というものを絶対評価でなく一対比較による相対評価に基づいて行うというところにある。例えばここに芥川賞に応募したn編の小説があったとする。これを評価して順位をつけたい。このとき一つ一つの作品を読んで、Aは80点，Bは75点，…などと絶対評価をすることは極めて難しいし無理があるが、例えばそれぞれを比べてみたら「AはBより良い」とか「同程度である」という位は言えそうである。

もう少し欲を言えば、「AはBより非常によい」という良さの程度を表すことまでも許すとすれば、一対

比較の結果は、

$$\left.\begin{array}{l}\text{「AとBとは同程度」}\\ \text{「AはBより良い」（これは「BはA}\\ \text{より悪い」と同義とする）}\\ \text{「AはBより非常に良い」（「BはA}\\ \text{より非常に悪い」と同義）}\end{array}\right\} \quad (1)$$

の5通りで表現される。

さらに「AはBより極度に良い」といった良さの程度の段階を増やすこともできようが、どの程度まで段階を増やすかは各々の問題によっても異なるし、一概に極めることは適当でない。

話を一般的にするため、上記の小説を改めて1, 2, …, nの番号で表そう。そして番号iとjとの比較の結果をあるパラメータθ（これは大きさが1より大な適当な実数値とする）を用いて、

$$\begin{array}{ll}\text{「}i\text{が}j\text{より良い」なら}a_{ij}=\theta & \\ \text{「}j\text{が}i\text{より悪い」なら}a_{ji}=1/\theta & \\ \text{「}i\text{が}j\text{より非常に良い」なら}a_{ij}=\theta^2 & (2)\\ \text{「}j\text{が}i\text{より非常に悪い」なら}a_{ji}=1/\theta^2 & \\ \text{「}i\text{と}j\text{が同程度」なら}a_{ij}=1 & \end{array}$$

で定まる$a_{ij}\,(i,j=1\sim n)$を考え、$n\times n$の行列

$$A=[a_{ij}] \quad (3)$$

を作る。この Aを比較行列（comparison matrix）と呼ぶ。Aは$a_{ii}=1(i=1\sim n)$ であり、$a_{ji}=1/a_{ij}$という性質をもつが、このような行列を逆数行列と呼んでいる。

実際の計算に際してはパラメータ$\theta(>1)$の値を具体的に定めねばならないが、どの位が適当かは無論問題によって異なるが経験に依ると、$\theta=2\sim3$程度が良いことが分かる。創始者Saaty氏は比較行列の値を1から9までの固定した値（とそれらの逆数）で表現しているが、私は上記のパラメータ法の方が自由で自然であると判断してこれを用いることにしている。

2.2 統合化

上に得られた一対比較の情報、これが比較行列Aで与えらているわけだが、これをいかに統合化するかという所にAHPの第2の特徴がある。Saaty氏はこれを比較行列Aの主固有ベクトル（Aの最大固有値に対する固有ベクトル）によって与えることを提案している。つまりAHPの第2の特徴は固有ベクトル法にあると言える。

行列の固有値とか固有ベクトルを扱う、いわゆる固有値問題は、数学に不慣れな方には違和感を持つかもしれないが、自然科学の諸分野はもちろんのこと、社会科学の分野でも、多変量解析の中の主成分分析や因子分析、数量化理論など、固有値問題は随所に顔を出してくる。このAHPでもまたこの固有値問題が出てきたわけで、その重要さが痛感される。この際ぜひマスターされることをお薦めする。大抵の線形代数の本にはその解説があるが、後の発展のことを含めて考え、またAHPやANPへの応用としては、[5]が適当と思われる。

2.3 固有値問題

簡単に言うと、$n\times n$行列Aの固有値λとそれに対する固有ベクトル $u^T=[u_1\ \dots\ u_n]$とは

$$Au=\lambda u \quad (4)$$

を満たすスカラーλとベクトルuを言う（uは列ベクトルであるが、その成分$u_1,\dots,u_n$を列ベクトルのまま書くとスペースを取るので、上のようにその転置u^Tで表すことが多い。）

(4)を満たすλは、$A-\lambda I$(Iは$n\times n$の単位行列)の行列式$|A-\lambda I|$が0となる条件、つまり固有方程式

$$|A-\lambda I|=0 \quad (5)$$

の解として定まるが、(5)はλのn次代数方程式で、一般にn個の根を持つ(重根があれば異なる固有値の個数はnより小さい）が、これらをAの固有値といいその中で一番値が大きな物が最大固有値 $\lambda_{\max}$である。

一般の行列の固有値は必ずしも実数になるとは限らないが、比較行列Aの要素a_{ij}は全て正であるからその最大固有値は常に実数であってかつ正であり、かつ(5)の根として単根であることがフロベニウスの定理から証明されている[5]。比較行列Aでも最大固有値以外の固有値は実数でなく複素数になることもあるが、その場合も絶対値は$\lambda_{\max}$より小である。

さて(5)の解としての固有値λが定まると、それに対する(4)の解uがこのλに対する固有ベクトルである。例えば主固有ベクトルは

$$Au=\lambda_{\max}u \quad (6)$$

の解として定まるベクトル uであるが、(6)を(A-$\lambda_{\max}I$)u= 0 と書き換えてみると、これはuについての同次方程式である。そこで$u=0$が解であることは

すぐに分かるが、これを自明解(trivial solution)と呼んでいる。自明解以外にも解があるということが固有値問題のミソとも言える。

(6) の自明解以外の解、つまり非自明解$\boldsymbol{u}$が実は$\lambda_{\max}$に対する固有ベクトル、つまり主固有ベクトルなのである。(6) の形からすぐわかるように、$\boldsymbol{u}$が(6)の解ならその任意のスカラー倍$c\boldsymbol{u}$も(6)の解となる。したがって主固有ベクトルのスカラー倍はまた主固有ベクトルである。またこれもフロベニウスの定理から言えることだが、$\boldsymbol{A}$が比較行列なら(その要素がすべて正であることから)、主固有ベクトルの成分はすべて正である[5]。($\boldsymbol{u}$の成分がすべて正であっても, $c=-1$とおけば$c\boldsymbol{u}$の成分は負になるから、正確には、すべての成分が正である主固有ベクトルが存在する、と言うべきではあるが。)

以上を定理としてまとめておこう。

定理 1 $\boldsymbol{A}$をAHPにおける(3)のような比較行列であるとすると、その最大固有値$\lambda_{\max}$は、固有方程式(5)の単根であり、(実数で)正の値をもつ、またそれに対応する主固有ベクトルの成分はすべて正である。

AHPで、総合評価として何故主固有ベクトルの成分を用いるかの理由は後ほど詳説するが、とりあえずいくつかの例を示そう。

2.4 数値例

この辺で簡単な数値例を通して以上の話をたどってみよう。

[例1] $n=3$として、比較行列が

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \boldsymbol{A}= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta \\ 1/\theta & 1 & \theta \\ 1/\theta & 1/\theta & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

のとき、$\theta=2$として計算すると、最大固有値と主固有ベクトルは

$$\lambda_{\max}=3.054, \quad \boldsymbol{u}^T=[0.493, 0.311, 0.196]$$

となることがわかる。上にのべたように固有ベクトルはスカラー倍が任意であるから、その成分の和が1となるように基準化しておくのが普通である。

この例では$\boldsymbol{A}$より、1は2と3より良く、2は3よりよいという結果を示している。このとき$\theta=2$とすると、1, 2, 3統合評価がそれぞれ0.493、0.311、0.196となるという結論になるのである。むろんこの値自身はθの値に依存する。θを増せばそれらの統合評価の差は大きくなるである。ためしに$\theta=3$として計算をしてみると

$$\lambda_{\max}=3.136, \quad \boldsymbol{u}^T=[\,0.583,\ 0.281,\ 0.135\,]$$

となるが、これらの順位は不変である。

[例2] $n=4$の例として

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \boldsymbol{A}= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \theta & 1/\theta & \theta \\ 1/\theta & 1 & \theta & \theta \\ \theta & 1/\theta & 1 & 1/\theta \\ 1/\theta & 1/\theta & 1/\theta & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

を考えると、$\theta=2$として計算すると

$$\lambda_{\max}=4.644, \ \boldsymbol{u}^T=[\,0.294,\ 0.276,\ 0.213,\ 0.203\,]$$

となる。

この場合$\boldsymbol{A}$をみると、1は2より良く、2は3より良く、3は1より良いことを示しているが、これは一見矛盾であるが、人間の判断の中にはこうした矛盾はしばしばおこる。AHPではこのような矛盾も許容して計算を遂行する。しかしこれを後で述べる整合性という尺度によってその矛盾の程度を求め、これがあまり大きい場合は、整合性のない判断として捨てさるなどの適当な処置をとる。

この整合性が極めて悪い場合には、θの値によって、順位が逆転したりすることもあるが、整合性が良い場合には順位の逆転はあまり起こらないことが経験上知られている。

さて以上のような主固有ベクトルを求めるのに(5)、(6)のような定義に従って直接計算することは極めて効率が悪いし、殆ど不可能である場合も多い。現在ではパッケージなども利用できるが、やはり借物でなく自分で計算法をわきまえておくことが、色々な意味で重要であると思うので、ここではよく知られたパワー法(べき乗法)と呼ばれる方法を、この講の付録に紹介しておく。

2.5 階層構造

AHPの特徴は一対比較値を原データとして、その統合化として主固有ベクトル法を用いることであることをのべたが、もう一つの重要な特徴として、階層(hierarchy)構造がある。

話をはじめの芥川賞応募作品の評価の問題に戻そう。作品の良し悪しと言っても、実は色々な観点によって異なってくるのが普通である。つまり評価の基準が変わると、良し悪しも異なってくるわけである。

この例で言えば、評価基準として、文章の華麗さなどを中心とする文学性、思想の深さとしての思想性、着想の豊かさや新鮮さを問う着想性などがありうる。

そこで文学性を評価基準としたときの一対比較を行い、その比較行列の主固有ベクトル$\boldsymbol{u}^T = [u_1, \ldots, u_n]$が作られ、さらに思想性、着想性のそれぞれに対して評価ベクトル$\boldsymbol{v}^T = [v_1, \ldots, v_n]$、$\boldsymbol{w}^T = [w_1, \ldots, w_n]$が作られる。

さてこれを総合化するには、評価基準そのものを対象として、この重要度をやはり一対比較と主固有ベクトル法によって決定する。つまり、文学性—思想性、文学性—着想性、着想性—思想性の重要度を一対比較によって、

同程度、より重要、非常に重要

等の結果を得、θ によってこれを比較行列にまとめ、その主固有ベクトル$[a,\ b,\ c]$ を得たとすれば、各評価基準の重要度はそれぞれ,a, b, cであるとみなすわけである。(ここでも重要度ベクトルは基準化されている、つまり $a+b+c=1$としておく。)

こうして作品i の総合評価値 t_iとして

$$t_i = au_i + bv_i + cw_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

を用いようというのが、AHPの考えである。今後のため(7)を行列形式で

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n & v_n & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{8}$$

と書いておこう。ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$および $[a,\ b,\ c]$は すべて基準化されているから総合評価ベクトル も基準化されたベクトル$\boldsymbol{t}^T = [t_1, t_2, \ldots, t_n]$になる。

この総合評価の方法は図1のように示すとわかりやすくなるが、これが階層的になっているので、AHPにはhierarchyの名があるのである。図1では作品の例を書いたが、AHPでは一般に評価対象のことを代替案(alternative)と呼ぶことが多い。

[附録]パワー法 (べき乗法):最大固有値および主固有ベクトルの求め方

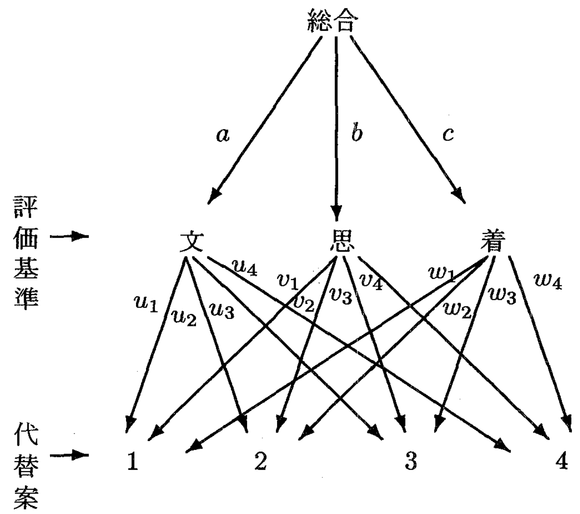

図1

$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$の最大固有値 $\lambda_{\max}$とそれに対する固有値ベクトル$\boldsymbol{u}$ を求めるには、$\lambda_{\max}$が実数で単根である場合はパワー法が最も簡単で、効率的である。幸いにしてAHPの場合は定理1に示したように、上の性質をもつので、パワー法を用いることができる。

アルゴリズムはつぎのように簡単である;

1. 初期ベクトル$\boldsymbol{u}(0)$ を選ぶ。 $\boldsymbol{u}(0)$としては理論上はゼロベクトル以外なんでもよいが、AHPの場合は

$$\boldsymbol{u}(0)^T = [1/n, 1/n, \ldots, 1/n]$$

がよいだろう。

2. $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(k) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(k-1) \\ \boldsymbol{v}(k)^T &= [v_1(k),\ \ldots,\ v_n(k)] \\ \boldsymbol{u}(k) &= \boldsymbol{v}(k)/t(k) \\ t(k) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i(k) \end{aligned} \tag{9}$$

を計算すると、大きなk に対して、$t(k), \boldsymbol{u}(k)$ が一定の値に収束する。その収束値が $\lambda_{\max}$および主固有値ベクトル$\boldsymbol{u}$ である。

注] (9) 式で は$t(k)$を$\boldsymbol{v}(k)$成分の和と定義している。AHPの場合 $\boldsymbol{v}(k)$の成分はつねに正であるから、これでよいが、一般の場合は、$t(k)$ としては、$\boldsymbol{v}(k)$ の成分の2乗和の平方根を用いるのがよい。

参考文献

[1] 刀根薫：”ゲーム感覚意思決定法”，日科技連出版(1995).

[2] 刀根薫，真鍋竜太郎編:”AHP事例集”，日科技連出版(1990).

[3] T.L.Saaty :”The Analytic Hierarchy Process”, McGraw Hill, New York (1980).

[4] T.L.Saaty： ”The Analytic Network Process”, RWS Publications (1996).

[5] 伊藤,岩井,岩堀,上林,奥野,高橋:”行列とその応用”,紀伊国屋書店(1987).

会告

日本オペレーションズ・リサーチ学会創立40周年記念
「若手研究者への海外渡航助成」のお知らせ

本誌の1996年８月号に会告として掲載しましたとおり，本学会は創立40周年記念事業のうちの『**OR振興のための国際協力事業**〈支援：大和ハウス工業㈱〉』の一環として，５年間にわたり，OR関係の優れた若手研究者の国際会議等への参加費用の支援を行います。

つきましては，下記要領により第２回の助成の募集を行いますので，奮ってご応募ください。

記

[**応募資格**]　下記のすべての条件を満たす方。

１．本学会の正会員または学生会員であること。

２．申請書提出時に大学の博士後期課程に在籍している学生，あるいは大学・非営利の研究機関に所属している研究者で，他の財政的援助を得にくいこと。

３．1998年３月31日現在で年齢35才以下であること(ただし，予算に余裕があった場合には37才程度まで考慮する可能性があります)。

４．1998年４月から1999年３月までに海外で開催されるOR関係の国際会議に出席して論文を発表する予定であること。

５．本事業による助成を受けた経験がないこと。

[**応募方法**]

本学会事務局にFax（03-3815-3352）で申請要項を請求してください（電話での請求は極力御遠慮ください)。Faxで要項を送付しますので，その指示に従って必要書類を調え，事務局へ郵送してください。

[**募集締切**]

1998年２月末日（必着）

[**選考方法**]

採否および援助額の決定は，選考委員会を設けて行います。選考に際しては，IFORSおよびAPORSが主催あるいは共催する会議に若干重点を置きます。採用者数は数名（５～10名程度）の予定です。援助額は，渡航費＋滞在費＋会議登録費を越えない範囲で決定します。選考結果は，４月上旬頃に応募者に個別に通知する予定です。