A Method to Identify Product Form in Queueing Networks

高田　寛之

東京理科大学大学院理工学研究科修士課程情報科学専攻（現所属：東京理科大学）指導教員：宮沢政清教授

1．はじめに

ネットワーク型待ち行列の状態の定常分布を求めることは一般に困難であるが，ある種の条件の下では，その分布が周辺分布の積となり（これを積形式と呼ぶ），解析的に扱いやすい．また，応用上は積形式を仮定してシステムの評価等を行うことが多い．したがって，システムが積形式解を持つか持たないかを判定することは，理論的に興味があるだけでなく，応用上も重要である．このためには，積形式解をもつための必要十分条件について調べる必要があるが，これまでの研究は，拡散近似モデルを例外（文献［4］参照）として，十分条件（準可逆性や局所平衡条件等）しか得られていない．（例えば，文献［1］［2］［3］参照）．本論文では，この必要十分条件を与える（定理3．3）とともに，それが準可逆性より真に弱い条件であることを示した（第4節）．また準可逆性が必要条件となる場合（定理3．2）についても論じる．（今回は紙面が足りないので，第5節は省略する）

2．モデル

文献［1］に従って，0からNで番号付けされた$N+1$個のノードを持つネットワーク型待ち行列を定義する．ただしネットワーク内の客の数に制限はなく，各ノードはそれ自体がネットワークであっても良い．ノードiの状態空間を高々可算な要素を持つ集合S_iで表す．ノードiへ到着，内部推移，退去がある時，状態が$x_i\to x'_i$と変化する確率や（非負の）率をそれぞれ$p_{i,a}(x_i,x_i')$，$q_{i,n}(x_i,x_i')$，$q_{i,d}(x_i,x_i')$で表す．ただし$x_i\in S_i$に対し，$\Sigma_{x'_i\in S_i}p_{i,a}(x_i,x_i')=1$とする．ネットワークを次のように構成する．ノード$i$を出た客が次にノード$j$を選ぶ条件付確率を$r_{i,j}$で表し，$R=\{r_{i,j}\}_{i,j\in J}$をルーティングと呼ぶ．ただし各$i$に対し$\Sigma_j r_{i,j}=1$であり，既約なルーティング（つまり，すべてのノードにいつかはたどり着けるルーティング）かつ，ネットワークの状態と独立である（つまり，客は常にサイコロで次の行き先を決める）とする．このようにしてネットワークは，状態空間$S=\Pi_i S_i$と$x,x'\in S$に対し$Q(x,x')=\Sigma_{i,j}Q_{i,j}(x,x')$で定義される推移率$Q$の連続時間型マルコフ連鎖で表現できる．ここに$Q_{i,j}$は以下のように与える．$Q_{i,i}(x,x')=1\ [x_i=x_i']\ (\Sigma_{y_i\in S_i}q_{i,d}(x_i,y_i)r_{i,i}p_{i,a}(y_i,x_i')+q_{i,n}(x_i,x_i'))$，$Q_{i,j}(x,x')=1\ [x_{i,j}=x'_{i,j}]\ q_{i,d}(x_i,x'_i)r_{i,j}P_{j,a}(x_j,x_j')$ $(i\neq j)$．ただし，$1\ [\cdot]$は括弧内が真なら1，偽なら0の値をとる関数である．また，x_i，$x_{i,j}$はそれぞれ，ベクトルxの第i，iとj項目を落としたものを表している．

ここではQの定常分布に対して議論を行う．ここに，πがQの定常分布であるとは任意の$x\in S$に対し，$\pi(x)\Sigma_{x'\in S}Q(x,x')=\Sigma_{x'\in S}\pi(x')Q(x',x)$が成り立つことである．また，次のような実数$\gamma_i$の集合$\gamma$が存在するならば，$\gamma$局所平衡条件（local balance）が満たされるという．任意のiと$x\in S$に対して，$\pi(x)(\Sigma_j\Sigma_{x'\in S}Q_{i,j}(x,x')+\gamma_i)=\Sigma_j\Sigma_{x'\in S}\pi(x')Q_{j,i}(x',x)$．特に，$\gamma$が0ベクトルならば，単に局所平衡条件と呼ぶ．各$i$に対し，$\pi_i$を$S_i$上の分布とする．$Q$の定常分布$\pi$が$x=(x_0,\cdots\cdots x_N)\in S$に対し，$\pi(x)=\Pi_i\pi_i(x_i)$を満たすとき，分布$\pi$は積形式（product-form）をもつという．表記を簡単にするため，$\mu_i(x_i)=\Sigma_{x'_i\in S_i}\pi_i(x'_i)q_{i,d}(x_i',x_i)$，$\lambda_i(x_i)=\Sigma_{x'_i\in S_i}\pi_i(x_i')p_{i,a}(x'_i,x_i)$とおく．$i$に対し，もしすべての$x_i\in S_i$に対し，$\mu_i(x_i)-\beta_i\pi_i(x_i)=0$であるような非負数$\beta_i$が存在するなら，ノード$i$は（$\beta_i$に関する）準可逆性（quasi-reversibility）を持つという．もしすべてのノードが準可逆性を持つならば，ネットワークが（βに関する）準可逆性を持つという．

3．結　果

非負数α_iに対し，推移率$q_i^{(\alpha_i)}$を$q_i^{(\alpha_i)}(x_i,x'_i)=(1-r_{i,i})\alpha_i p_{i,a}(x_i,x'_i)+q_{i,d}(x_i,x'_i)+q_{i,n}(x_i,x'_i)+\Sigma_{y_i\in S_i}q_{i,d}(x_i,y_i)r_{i,i}p_{i,a}(y_i,x_i')$, $(x_i,x'_i\in S_i)$により定義する．

定理3.2　Qの積形式定常分布πが存在し，γ局所平衡条件が成り立つことは，次の３つの条件を満たす非負ベクトルα，βが存在することと同値である．(i) 各iに対し，$q_i^{(\alpha_i)}$は定常分布π_iをもつ．(ii)ネットワークがβに関する準可逆性を持つ．(iii)各iに対し，$\alpha_i=\Sigma_{j\neq i}\beta_j r_{j,i}$(トラフィック方程式 (traffic equations) が成り立つ．

定理3.3　Qの積形式定常分布πが存在することは定理3.2の条件(i)，(iii)と次に述べる条件(iv)を満たす非負ベクトルα，βが存在することと同値である．(iv) $i\neq j$であるようなすべての組(i,j)とそれらのノードの任意の状態$x_i\in S_i$，x_jS_jに対して次式が成立する．

$$(\mu_i(x_i)-\beta_i\pi_i(x_i))r_{i,j}(\lambda_j(x_j)-\pi_j(x_j))+(\mu_j(x_j)-\beta_j\pi_j(x_j))r_{j,i}(\lambda_i(x_i)-\pi_i(x_i))=0 \quad (1)$$

この式をノードi,jに関する相殺平衡方程式と呼ぶ．もしノードi,jに対し，相殺平衡方程式を満たす非負数β_iとβ_jが存在するなら，組(i,j)は相殺平衡条件(counter balance)を満たすという．さらに，ノードのすべての組(i,j)が相殺平衡条件を満たすとき，ネットワークが相殺平衡条件を満たすという．また，すべてのiと$x_i\in S_i$に対し$\lambda_i(x_i)-\pi_i(x_i)=0$が成り立つとき，明らかにネットワークは相殺平衡条件を満たす．この条件を無効果到着条件 (non-effective arrival condition) と呼ぶ．

4．非準可逆積形式ネットワークの例

次の２ノード開型ネットワークを考える．各ノードの状態空間は$S_0=\{0\}$，$S_1=S_2=\{0,1\}$．$p_{i,a}$，$q_{i,d}$や$q_{i,n}$は以下により与える．$p_{0,a}(0,0)=1$, $q_{0,d}(0,0)=2\ (=\beta_0)$, $q_{i,n}(x_i,x'_i)=0\ (i=1,2, x_i,x'_i=0,1)$, $p_{i,a}(0,0)=0$，$p_{i,a}(0,1)=1$, $p_{i,a}(1,0)=1$, $p_{i,a}(1,1)=0\ (i=1,2)$, $q_{1,d}(0,0)=3/2$, $q_{1,d}(0,1)=3/2$, $q_{1,d}(1,0)=0$, $q_{1,d}(1,1)=0$, $q_{2,d}(0,0)=1/6$, $q_{2,d}(0,1)=1/2$, $q_{2,d}(1,0)=3/2$, $q_{2,d}(1,1)=0$．ルーティングは$r_{i,j}=1/2$ $(i,\ j\in J,\ j\neq i)$，で他は０とする．このとき，準可逆性は成立しないが，相殺平衡条件は成立する．したがって，相殺平衡条件は準可逆性より真に弱いことがわかる．

5．積形式判定法

定理3.3から次のような積形式判定法を得ることができる．まず，各iと任意の非負数α_iに対し，$q_i^{(\alpha_i)}$に対する定常方程式を解き，$q_i^{(\alpha_i)}$定常分布π_iを得る．ここにπ_iは未知のα_iに依存する．次に（α_iに依存した）μ_i，λ_iと$D_i(\alpha_i)=\Sigma_{x_i\in S_i}\mu_i(x_i)$を計算し，方程式$\beta_i=D_i(\alpha_i)$とトラフィック方程式（全部で$2N+2$個の連立方程式）を$\alpha$と$\beta$について解くことで，ベクトル$\alpha$と$\beta$の値を知る．その$\alpha$を，$\pi_i$，$\mu_i$や$\lambda_i$に代入して，相殺平衡条件をチェックする．

参考文献

[1] Chao, X. and Myazawa, M. 1996b. On quasi-reversibility and local balance:An alternative deribation of the product-form results, preprint.

[2] Chao, X. and Myazawa, M. 1996c. Early and late signaling mechanisms in queues and queueing networks, preprint.

[3] Kelly, F. P. 1979. Reversibility and Stochastic Networks, John Wiley Sons, New York.

[4] Harrison, J.M. and Williams R.J. 1992. Brownian models of feedforward queueing networks: Quasireversibility and product form solutions. Ann. Appl. Probab. 2, 263-293.