ファイナンスにおける取り引きコストを考慮したリスク回避戦略

一上　響
東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻（現所属：日本銀行）指導教員：伏見正則教授

1　これまでの主な研究と本研究の意義

金融派生証券のヘッジ戦略決定にあたっては，Black-Scholesモデルがその発表から20年以上経た現在でもその単純さや扱いやすさ等の理由から最もよく利用されている．Black-Scholesモデルは株式と債券が一種ずつ取り引きされている市場において（1）取り引きコストがない．（2）満期までの間常に派生証券と同価値になるようにヘッジポートフォリオを連続的に組変える．という仮定から，株式の所持枚数ξ_tを理論価格の株価による偏微分$\frac{\partial u(t,S_t)}{\partial S_t}$(デルタと呼ばれている．)に常に合わせるように取り引きするという結論を導いていることに特徴がある．しかしながら実際には取り引きするたびに手数料や税金などのコストが生じるため，連続的にポートフォリオを組変えるとコストが発散してしまう。そこで離散的に取り引きをする必要が出てくるのだが，取り引きしなさすぎるとポートフォリオの価値が派生証券の価格から乖離してしまいヘッジの意味がなくなってしまうという問題が発生するため，いつどれだけ取り引きするかといったことが重要な問題となってくる．

現在まで，取り引きコストを考慮したモデルの研究は（1）コールオプションをヘッジする．（2）一定時間間隔でポートフォリオを組変える．（3）取り引きコストが取り引き額に線形比例する．という条件下でなされたものが多い．Leland(1985)やBoyle and Vorst (1992)のモデルも上記の条件を前提として，株式の所持枚数ξ_tの改良を提案している．こういった研究も十分意味のあるものではあるが，上記の条件はあまりにきつく，適用範囲が狭過ぎる．

van der Hoek and Platen(1996)のモデルでは，派生証券とヘッジポートフォリオの価値の乖離を外からの資金で埋め合わせできるようにし，将来発生するであろう乖離の埋め合わせ資金の期待値(期待取り引きコスト)$U_t(\phi)$と分散(リスク)$R_t(\phi)$をなるべく小さくするようにヘッジ戦略ϕを決定することを目的としている．その特長をまとめると，（1）満期の株価にだけ依存する全ての派生証券に使える．（2）ポートフォリオの組変えの時点は状況(株価)に応じて最適化する．（3）取り引きコストが取り引き額比例の場合だけでなく，定額の場合についても議論している．となり，Lelandモデルや Boyle-Vorstモデルに比較して適用範囲が断然広くなっている．しかしながら彼らは具体的な解の導出についてはあいまいにしか言及しておらず，また実際には取り引きコストは取り引き額に対して凹性を持つとするのが妥当だと思われる．

本研究はこのvan der Hoek-Platenモデルを拡張しており，次の特徴を持つ．（1）取り引きコスト関数を(5)式のように凹関数に一般化する．（2）リスクの上限を個々のディーラーの価値観に応じて設定できるようにし，その上限を越えない範囲で期待取り引きコストが最小になるように最適戦略を求める．（3）取り引きコストをブローカーの手数料収入と見て，それを最大化する取り引きコスト関数の形状について考察する．

2　リスクコントロールヘッジ(RCH)モデル

ここでは本研究の提案するRCHモデルについて述べる．RCHモデルでは，まず取り引きコスト関数に凹性を仮定し，リスクをディーラーの受け入れられる上限を越えないように制御しつつ，期待コストが最小になるように戦略をとる．

Black-Scholesモデルと同様に株式と債券が一種ずつある市場を考える．ヘッジ戦略を$\phi=\{\phi_t=(\xi_t,\eta_t,\delta_t);\ 0\le t\le T\}$で表す．$\xi_t$と$\eta_t$は時刻$t$に持つ株式と債券の枚数である．$\delta=\{\delta_t;\ 0\le t\le T\}$は正の$\mathcal{F}-$可予測(predictable)過程で，$\Delta/\delta_t$で時間間隔を表現し，$t\ge\tau_{i_t}+\Delta/\delta_t$を満たす最初の時刻$t$で取り引きを行うとする．ここで$\tau_{i_t}$は時刻$t$までで最後に取り引きした時刻である．

Δが十分に小さいとすると，株式所持枚数ξ_tと期間$[t,v]$におけるリスク$R_{t,v}(\phi)$が近似的に

$$\xi_t=\frac{\partial}{\partial S_t}u(t,S_t) \tag{1}$$

$$R_{t,v}(\phi)=\frac{\Delta}{2}\int_t^v E((\sigma^2S_s^2\frac{\partial^2}{\partial S_s^2}u(s,S_s))^2\delta_s^{-1}|\mathcal{F}_t)ds \tag{2}$$

と導かれる．σはボラティリティーと呼ばれ，株価の変動の大きさを表す定数である．

株式の時刻τ_iにおける取り引きコスト関数を

$$\Lambda_{\tau_i}(\phi)=\lambda\Delta^q\{S_{\tau_i}|\xi_{\tau_i}-\xi_{\tau_{i-1}}|\}^l \tag{3}$$

で表す．ここで$q>0$，$\lambda>0$，$0\le l\le 1$であり，τ_{i-1}は前回取り引きした時刻である．Δが十分小さい

とき期待取り引きコストは次のようにできる．

$$U_t(\phi) = \lambda\Delta^{q+\frac{l}{2}-1}\frac{2^{\frac{l}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{l+1}{2}) \int_t^T E(\sigma^l S_s^{2l}|\frac{\partial^2}{\partial S_s^2}u(s,S_s)|^l \delta_s^{1-\frac{l}{2}}|\mathcal{F}_t)ds \quad (4)$$

ここでは Δ が十分小さい場合，時刻 t からみて任意の時刻 $v \in [t,T]$ におけるリスクがトレーダーの考える上限 $\kappa(t,v,S_t)$ を越えない範囲，つまり $R_{t,v}(\phi,\Delta) \le \kappa(t,v,S_t)$ を満たす中で最も取り引きコストが小さくなる最適ヘッジ戦略を考える．

ここで具体例としてリスクの上限を $\kappa(t,v,S_t) = \kappa_0(v-t)$ とおいた場合を考える．これはリスク（累積追加投入コストの分散）の上限がブラウン運動の分散と同様に時間に比例していることを意味している．κ_0 はリスク許容度と呼び，大きいほどリスクをとれるという意味がある．コスト関数が取り引き額に対して凹性を持っているならば，できる限り大きな取り引きをまとめてした方が良いという条件から，取り引き時間間隔が

$$\Delta/\delta_t = 2\kappa_0/(\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S_t^2}u(t,S_t))^2 \quad (5)$$

と導かれる．またこのとき次のようになる．

$$R_{t,v}(\phi) = \kappa_0(v-t) \quad (6)$$

$$U_t(\phi) = \frac{\lambda\Delta^q}{2\sqrt{\pi\kappa_0}}\int_t^T E(\sigma^4 S_s^4|\frac{\partial^2}{\partial S_s^2}u(s,S_s)|^2|\mathcal{F}_t)ds \left(\frac{2\sqrt{\kappa_0}}{\sigma}\right)^l \Gamma(\frac{l+1}{2}) \quad (7)$$

3　数値実験結果

RCH モデルを数値計算により他のモデルと比較する．客観的基準として，最終的に満期において生じた累積追加投入コストが正規分布に従うとしたときの α %点を使う．具体的には $\rho = \Phi^{-1}(\alpha)$ として，100 のサンプルから得られた標本平均に標本標準偏差の ρ 倍を加えたものを用いる．ただし $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数であり，ここでは $\alpha = 99.9$ とする．リスク許容度 κ_0 をこの基準 $U_T(\phi) + \rho\sqrt{R_{t,T}(\phi)}$ を最小にするように求める．

$$\kappa_0 = \{\frac{2-l}{\rho\sqrt{T-t}}\frac{\lambda\Delta^q}{2\sqrt{\pi}} \int_t^T E(\sigma^4 S_s^4|\frac{\partial^2}{\partial S_s^2}u(s,S_s)|^2|\mathcal{F}_t)ds \left(\frac{2}{\sigma}\right)^l \Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)\}^{\frac{2}{3-l}} \quad (8)$$

その他のモデルとしては，（1）等時間間隔で株式所持枚数をデルタに合わせる等時間間隔モデル．（2）デルタがある一定以上変動した場合に株式所持枚数をデルタに合わせるリミットモデル．（3）Leland モデル．を用いており，パラメータを様々な値に動かし最良のものを比較対象としている．

この実験から（1）RCH モデルは支払関数 $g(\cdot)$ が十分なめらかで取り引きコスト関数がある程度以上凹性を持つならば有用である．（2）Leland モデルは取り引きコスト関数が線形に近いほど有用であり，RCH モデルとの相性も損なわない．（3）リミットモデルは支払関数がなめらかでない場合や取り引きコスト関数が定額である場合に優れている．という結果が得られた．今後の課題として，RCH モデルとリミットモデルや Leland モデルをうまく融合して，より優れたモデルを作ることが考えられる．

4　最適コスト関数

トレーダーにとっての取り引きコストはブローカーにとっての手数料収入を意味する．ここではトレーダーがリスクコントロールヘッジ戦略をとると仮定した場合，ブローカーにとって最も収入が大きくなるコスト関数，つまり (3) 式における最適な l を求めることを考える．

(7) 式より $\left(\frac{2\sqrt{\kappa_0}}{\sigma}\right)^l \Gamma(\frac{l+1}{2})$ が最大となる l を求めればよいことが分かる．これから

- $\kappa_0 > \frac{\pi\sigma^2}{4}$ のとき $l=1$ が最適
- $\kappa_0 < \frac{\pi\sigma^2}{4}$ のとき $l=0$ が最適

となる．これは，ボラティリティーが大きかったりトレーダーがリスクに対して慎重な場合には，少額のヘッジを頻繁に行なうはずなので，取り引きコストはその額に拘らず一定にした方がより多くの手数料収入を期待でき，逆ならば比較的長い時間間隔で大きなヘッジを行うはずなので，取り引き額に比例するコストにした方がいいことを示している．

数値実験で使用した値 $\sigma = 0.3$ を使うと，$\pi\sigma^2/4 = 0.0707$ となる．数値実験の結果を見ると，この値は一度のヘッジの中で κ_0 がこの値の上下を共にとることのできる程度の値である．よって現実には l は $0 < l < 1$ の範囲で選ばなければならないであろう．

参考文献

[1] Boyle, P.P. and Vorst, T.: "Option pricing in discrete time with transaction costs," *Journal of Finance* **47**, 271-293, 1992.

[2] Leland, H.E.: "Option pricing and replication with transaction costs," *Journal of Finance* **40**, 1283-1301, 1985.

[3] van der Hoek, J. and Platen, E.: "Pricing and hedging in the presence of transaction costs," *Working Paper*, 1996.