教養講座

確率モデルとその応用II

尾崎　俊治

2. 確率変数

2.1 確率変数

前回の定義1.2において確率を定義し，標本空間Ωの上の任意の事象Aに対し，その確率が公理的に与えることができることを示した．標本空間は抽象空間であるので，より簡単に数直線上の線分によって確率を考えれば好都合である．標本空間Ωから実数空間Rへの写像（関数）を考えよう．各標本点ωは一意に実数を対応させる．あらゆる対応の集まりをΩからRへの写像といい，$f:\Omega \to R$と書く．特に，事象Aの写像は$f(A)$と書く．逆に，Rの部分集合Bの逆写像とは，$f(\omega) \in B$となるような$\omega \in \Omega$の部分集合であり，$f^{-1}(B)$と書く．

定義 2.1　標本空間Ωの上で定義された**確率変数** (random variable) XとはΩから実数空間Rへの写像で，Rのあらゆる部分集合の逆写像がΩの上の事象となるものである．

ここでは簡単に実数空間は1次元，すなわち数直線上に限るとする．一般のn次元空間に拡張することもできる．確率変数Xは実数値関数で，数直線R上の区間を定めれば，それに対応するΩの上の事象が必ず存在するものである．もちろん，事象を定めれば，その確率は定義1.2によって与えることができる．

もしXが可算個の値を取ることができるならば**離散形** (discrete) あるいはXが連続の値をとるならば**連続形** (continuous) という．例1.1，例1.2は離散形確率変数である．一方，身長，体重，到着時間間隔などは連続形確率変数である．

離散形確率変数Xに対して，**確率関数** (probability mass function) は

$$p_X(x) = P(X = x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$$

と定義される．ただし，$p_X(x) \geq 0$である．あらゆる$x \in R$に対する$p_X(x)$の和は当然1となる．確率変数Xの**分布関数**あるいは**分布** (distribution) は

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(-\infty < X \leq x) \\ &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} \\ &= \sum_{y \leq x} p_X(y) \end{aligned}$$

と定義される．明らかに，$F_X(\infty) = 1$となる．

一方，連続形確率変数Xについて，Rの任意の区間B（例えば，$a < X \leq b$）に対して

$$P(X \in B) = P\{X(\omega) : X(\omega) \in B\} = \int_B f_X(y)dy$$

であるような，非負の関数$f_X(x)$が存在する．この$f_X(x)$をXの**密度** (density) という．密度$f_X(x)$を用いて

$$f_X(x)dx \approx P(x < X \leq x + dx)$$

は確率変数Xが区間$(x, x + dx]$にある確率と説明できる．Xの分布は

$$F_X(x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

と定義される．明らかに，$F_X(\infty) = 1$となる．上記の定義から密度は

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

となる．

2.2 期待値と分散

一般に，離散形確率変数Xに対して，Xの**期待値** (expectation) あるいは**平均** (mean) は$\sum_x |x| p_X(x) < \infty$ならば，

$$E[X] = \sum_x x p_X(x)$$

おさき　しゅんじ　広島大学工学部
〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

によって定義される．すなわち，あらゆるXの値xに対する確率関数の重み付き平均である．

同様に，連続形確率変数Xに対しては，Xの期待値あるいは平均は$\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)dx<\infty$とすれば，

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$$

によって定義される．離散形あるいは連続形をいちいち区別して書くのは面倒であるから，簡単に

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_X(x)=\begin{cases}\sum xp_X(x) & (X\text{は離散形})\\ \int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx & (X\text{は連続形})\end{cases}$$

と表す．この積分表示は **スチルチェス積分** (Stieltjes integral) とよばれる．以後，スチルチェス積分を用いるが，Xが離散形ならば確率関数による和の計算を，Xが連続形ならば密度関数による積分の計算を意味する．

X^n（nは自然数）の期待値

$$E[X^n]=\int_{-\infty}^{\infty}x^ndF_X(x)$$

はXの **原点の周りのn次モーメント**とよばれる．さらに，

$$E[(X-E[X])^n]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^ndF_X(x)$$

はXの**平均値の周りのn次モーメント**とよばれる．

特に，上式において$n=2$としたとき，

$$\mathrm{Var}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2dF_X(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^2dF_X(x)-E[X]^2$$

はXの **分散** (variance) とよばれる．分散は分布の散らばり度合いを表す尺度であり，大きいほど散らばり度合いが大きい．特に，分散の正の平方根$\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$は**標準偏差** (standard deviation) とよばれる．

一般に，$i=\sqrt{-1}$を虚数単位とすれば，e^{iuX}の期待値

$$\varphi_X(u)=E[e^{iuX}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iux}dF_X(x)$$

はXの**特性関数** (characteristic function) とよばれる．特性関数の代わりに**モーメント母関数** (moment generating function)

$$M_X(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}dF_X(x)$$

を用いることもある．

さらに，Xが離散形のとき，

$$G_X(s)=\sum_k s^kp_X(k)$$

はXの **確率母関数** (probability generating function) とよばれる．

特に，Xが非負の確率変数であるときのみXの **ラプラス・スチルチェス変換** (Laplace-Stieltjes transform)

$$F_X^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF_X(x)$$

を用いることもある．特性関数，モーメント母関数はXが離散形であっても連続形であってもよいが，確率母関数はXが離散形のときのみ，ラプラス・スチルチェス変換はXが非負の確率変数のときのみ用いる．これらの広い意味の **積分変換** (integral transform) について次の定理がある．

定理2.1 分布関数と積分変換は一対一に対応する．すなわち，分布関数は一意に積分変換を決定し，積分変換は一意に分布関数を決定する．

2.3 離散形分布

2.1節で学んだように離散形確率変数は可算個の値をとる．そこで，簡単化のために$X=0,1,2,\cdots$における確率関数$p_X(x)$を与えれば，分布，平均，分散などは求めることができる．以下では代表的な離散形分布を示す．

2.3.1 ベルヌーイ分布

前回の例 1.9 に示したように，超幾何分布は試行ごとに赤玉の出る確率が変わる．それに対して，玉を元に戻す復元抽出を考えれば，赤玉の出る確率$p=n_1/n$は各試行で一定である．このように成功の確率をp $(0<p<1)$としたとき，**ベルヌーイ試行** (Bernoulli trial) とよぶ．身の周りにもこのようなベルヌーイ試行は数多く存在する（例えば，コイン投げ，サイコロ投げなど）．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

ベルヌーイ試行を$x=1$（成功），$x=0$（失敗）をとる確率変数Xと考えれば，**ベルヌーイ分布** (Bernoulli distribution) とよばれる確率関数は

$$p_X(x)=\begin{cases} p & (x=1) \\ 1-p=q & (x=0) \end{cases}$$

となり，平均，分散，特性関数は

$$E[X]=p\cdot 1+q\cdot 0=p$$

$$\mathrm{Var}[X]=p\cdot 1^2+q\cdot 0^2-p^2=p(1-p)=pq$$

$$\varphi_X(u)=pe^{iu\cdot 1}+qe^{iu\cdot 0}=pe^{iu}+q$$

となる．

ベルヌーイ試行を基礎にした以下の二項分布，幾何分布，負の二項分布（パスカル分布）を導出できることを示そう．

2.3.2 幾何分布

成功の確率をpとするベルヌーイ試行において初めて成功するまでの試行の回数をXとすれば，Xは幾何分布にしたがう．その確率関数は

$$p_X(x)=p(1-p)^{x-1} \qquad (x=1,2,\cdots)$$

となり，分布は

$$F_X(x)=\sum_{k=1}^{x} p(1-p)^{k-1}$$

$$=1-(1-p)^x \qquad (x=1,2,\cdots)$$

となる．

2.3.3 二項分布

例1.8で示したように，成功の確率pのベルヌーイ試行においてn回の試行でx回成功する確率変数Xを考えれば，これが二項分布になる．確率関数は

$$p_X(x)=\binom{n}{x}p^k(1-p)^{n-x} \qquad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

となる．ベルヌーイ分布は1回の試行を考えているが，二項分布はベルヌーイ試行のn回の繰り返しと考えられる．事実，二項分布の平均，分散はベルヌーイ分布のそれらのn倍となる．一方，特性関数はn乗となる（表2.1参照）．

2.3.4 負の二項分布

成功の確率pのベルヌーイ試行において，初めてr回（rは自然数）成功するまでの試行の回数Xを確率変数とすれば，Xは**負の二項分布** (negative binomial distribution) あるいは**パスカル分布** (Pascal distribution) にしたがう．簡単のために$r=3$の場合の一例を考える．Oを成功，Xを失敗とすれば

1	2	3	4	5	6	7	8		9
X	X	O	X	O	X	X	X	|	O

は9回の試行で3回成功して終わるが，最後の試行は必ず成功である．一般に残りの$(x-1)$回の試行のうち$(r-1)$回成功することになり，これは二項分布にしたがう．そこで

$$p_X(x)=\binom{x-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{x-r}p$$

$$=\binom{x-1}{x-r}p^r(1-p)^{x-r} \quad (x=r,r+1,\cdots)$$

が確率関数となる．1.3節で導入した負の二項係数を思い出せば，

$$\binom{x-1}{x-r}=\binom{-r}{x-r}(-1)^{x-r}$$

となるから

$$p_X(x)=\binom{-r}{x-r}p^r(-q)^{x-r}$$

と書くことができる．そこで，この分布が負の二項分布とよばれる．負の二項分布の平均，分散は

$$E[X]=\frac{r}{p}$$

$$\mathrm{Var}[X]=\frac{rq}{p^2}$$

となり，幾何分布のそれらのr倍となっている．一方，特性関数は

$$\varphi_X(u)=\sum_{x=r}^{\infty}e^{iux}\binom{-r}{x-r}p^r(-q)^{x-r}$$

$$=\left[\frac{pe^{iu}}{1-(1-p)e^{iu}}\right]^r$$

となり，幾何分布のそれのr乗となっている．幾何分布の試行をr回繰り返すことにより負の二項分布になることは明らかである．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表 2.1　離散形分布 $(q=1-p)$

名称	確率関数 $p_X(x)$	平均 $E[X]$	分散 $\mathrm{Var}[X]$	特性関数 $\varphi_X(u)$
超幾何分布	$\frac{\binom{n_1}{x}\binom{n-n_1}{r-x}}{\binom{n}{r}}$ $(x=0,1,\cdots,r)$	$\frac{rn_1}{n}$	$\frac{n_1r(n-r)(n-n_1)}{n^2(n-1)}$	
ベルヌーイ分布	$p \quad (x=1)$ $q \quad (x=0)$ $(x=0,1)$	p	pq	$pe^{iu}+q$
幾何分布	pq^{x-1} $(x=1,2,\cdots)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}}$
二項分布	$\binom{n}{x}p^xq^{n-x}$ $(x=0,1,\cdots,n)$	np	npq	$(pe^{iu}+q)^n$
負の二項分布	$\binom{x-1}{r-1}p^rq^{x-r}$ $(x=r,r+1,\cdots)$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$(\frac{pe^{iu}}{1-qe^{iu}})^r$
ポアソン分布	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$ $(x=0,1,2,\cdots)$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^{iu}-1)]$

2.3.5　ポアソン分布

パラメータλの **ポアソン分布** (Poisson distribution) の確率関数は

$$p_X(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \qquad (x=0,1,2,\cdots)$$

で与えられる．表 2.1 に離散型分布の確率関数 $p_X(x)$, 平均 $E[X]$, 分散 $\mathrm{Var}[X]$, 特性関数$\varphi_X(u)$ を一覧表にまとめる．

2.4　連続形分布

離散形分布は確率関数を記述することによってその分布を決定することができた．一方連続形分布は密度の積分として記述され，

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(y)dy$$

となる．密度は

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$$

によって記述される．本節において今後よく用いられる代表的な指数分布，ガンマ分布について述べる．

2.4.1　指数分布

非負の確率変数 Xを考える．Xの分布関数が

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

で表されるとき，Xは指数分布にしたがうという．Xの密度は

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

となる．指数分布の最大の特徴は次回で述べるポアソン過程において現れる“無記憶性”を備えていることである．次回において指数分布はよく現れてくる．

2.4.2　ガンマ分布

ガンマ分布 (gamma distribution) の密度関数は

$$f_X(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)} \qquad (x\ge 0)$$

で与えられる．ここで $\lambda\,(>0)$, $k\,(>0)$ はパラメータであり，次数 kのガンマ関数は

$$\Gamma(k)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{k-1}dx$$

で与えられる．特に，k が正整数（自然数）ならば，$\Gamma(k)=(k-1)\cdots 2\cdot 1=(k-1)!$ となる．ガンマ分布

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

表 2.2 連続形分布

名称	密度 $f_X(x)$	平均 $E[X]$	分散 $\mathrm{Var}[X]$	特性関数 $\varphi_X(u)$
指数分布	$\lambda e^{-\lambda x}$ $(x>0)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-iu}$
正規分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty)$	μ	σ^2	$\exp(iu\mu-\frac{1}{2}\sigma^2u^2)$
標準正規分布	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(-\infty<x<\infty)$	0	1	$\exp(-\frac{1}{2}u^2)$
ガンマ分布	$\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$ $(x>0)$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$	$(\frac{\lambda}{\lambda-iu})^k$
一様分布	$\frac{1}{b-a}$ $a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$

の平均，分散はそれぞれ

$$E[X]=\int_0^\infty x\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}dx$$
$$=\frac{k}{\lambda}\int_0^\infty\frac{x^{k+1}x^{-k}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k+1)}dx=\frac{k}{\lambda}$$
$$\mathrm{Var}[X]=E[X^2]-E[X]^2=\frac{k}{\lambda^2}$$

となり，2.4.1 項の指数分布のそれらの k 倍となる．ガンマ分布の特性関数は

$$\varphi_X(u)=\int_0^\infty e^{iux}\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}dx=\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)^k$$

となり，指数分布のそれの k 乗になる．

表 2.2 に連続形分布の密度 $f_X(x)$，平均 $E[X]$，分散 $\mathrm{Var}[X]$，特性関数 $\varphi_X(u)$ を一覧表にまとめる．

2.5 在庫モデル

この節では OR モデルとしてよく知られた在庫モデルについて考えよう．例えば，新聞売り子は新聞を仕入れて，その日のうちに売り尽くす．この在庫問題は OR においては**新聞売り子問題** (newsboy problem) としてよく知られている．新聞売り子問題にとって必要な費用を

c: 1 単位の購入単価

h: 1 単位の在庫維持費用

s: 1 単位不足するときの品切れ費用

のように定義する．当然 $c<s$ と仮定する．

次に，新聞の需要 B を考えよう．新聞の売り上げ数が需要であるから，需要 B は確率変数となる．新聞の場合は当然 B は離散形確率変数となる．品物によっては B は連続形になることもある．以下では離散形と連続形に分けて議論する．

2.5.1 離散形在庫モデル

需要 B の確率関数を $p(b)$ $(b=0,1,2,\cdots)$ としよう．さて，新聞売り子の発注量を z $(z=0,1,2,\cdots)$ とすれば，需要 B の実現値 b は $b\le z$ あるいは $b>z$ に分けて期待費用を考える．購入費用は当然 cz となる．次に在庫維持費用は $b\le z$ のときのみ必要で，その期待値は

$$h\sum_{b=0}^{z}(z-b)p(b)$$

となる．一方，$b>z$ のときは品切れ費用のみ必要で，その期待値は

$$s\sum_{b=z+1}^{\infty}(b-z)p(b)$$

となる．したがって，総期待費用 $L(z)$ は

$$L(z)=cz+h\sum_{b=0}^{z}(z-b)p(b)+s\sum_{b=z+1}^{\infty}(b-z)p(b)$$

となる．$L(z)$ の差分 $\Delta L(z)=L(z+1)-L(z)=0$ と

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

おいて

$$\Delta L(z) = c + h\sum_{b=0}^{z} p(b) - s[1 - \sum_{b=0}^{z} p(b)]$$

となるから，総期待費用を最小にするためには

$$\Delta L(z-1) < 0 \quad \text{および} \quad \Delta L(z) \geq 0$$

となるような

$$F(z-1) = \sum_{b=0}^{z-1} p(b) < \frac{s-c}{s+h} < \sum_{b=0}^{z} p(b) = F(z)$$

を満たすような z^* が最適発注量になる．

例 2.1　ある商品の需要は $n = 10$, $p = 1/2$ の二項分布にしたがうと仮定する（当然，$b = 0, 1, 2, \cdots, 10$）．$c = 2$ 万円，$h = 1$ 万円，$s = 9$ 万円とするとき最適発注量 z^* を求めよう．

需要は二項分布にしたがうから

$$F(z) = \sum_{k=0}^{z} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{z} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

となる．したがって，$F(5) = 638/1024 = 0.623$, $F(6) = 848/1024 = 0.828$ となるから

$$F(5) =< \frac{9-2}{9+1} = \frac{7}{10} < F(6)$$

となるから，$z^* = 6$ 単位が最適発注量（期首在庫量）となる．

2.5.2　連続形在庫モデル

この小節では需要 B は連続型確率変数で，その密度は $f(b)$，分布は $F(b)$ としよう．離散形モデルの結果は和の記号を積分に，確率関数を密度に置き換えればよいから，連続形モデルの総期待費用は

$$L(z) = cz + h\int_0^z (z-b)f(b)db$$

$$+s\int_z^\infty (b-z)f(b)db$$

となる．この $L(z)$ を最小にするためには，差分の代わりに微分すればよいから，

$$\frac{dL(z)}{dz} = c + hF(z) - s[1 - F(z)]$$

となる．差分の場合は計算が簡単であるが，微分の場合には積分の上下限と被積分関数が z の関数となるので，少し解析の知識が必要である．上式から $dL(z)/dz = 0$ として

$$F(z) = \frac{s-c}{s+h}$$

を満たす z^* が最適発注量になる．上式の右辺は 0 と 1 の間の値であり，$F(z)$ は 0 から 1 への単調増加関数（厳密には非減少関数）であるから，上式を満たす z^* は存在する．この z^* が $L(z)$ を最小にすることは

$$\frac{d^2L(z)}{dz^2} = (h+s)f(z) > 0$$

を満たしていることから確認できる．

例 2.2　ある商品の需要は $\lambda = 0.1$ の指数にしたがうと仮定する．**例 2.1** と同様に，$c = 2$ 万円，$h = 1$ 万円，$s = 9$ 万円とするときの最適発注量を求めよう．

$$F(z) = 1 - e^{-\lambda z} = \frac{7}{10}$$

となるから，最適発注量

$$z^* = -10\ln\left(1 - \frac{7}{10}\right) = 12.0$$

を得る．

参考文献

確率論および確率過程論は内外で多くの本が出版されている．Feller [1] の本は名著として現在も多くの人々に愛読されている．日本では伏見 [7]，森村・木島 [8]，宮沢 [9] はよく読まれている．この原稿は拙著 [3,10] を参考にまとめた．

[1] Feller, W. : "An Introduction to Probability Theory and Its Applications", Vol. I, 3rd ed., Wiley, New York, 1968 (邦訳あり).

[2] Karlin, S. and Taylor, H. M.: "A First Course in Stochastic Processes", Academic Press, New York, 1975 (旧版 Karlin, S. 単著のみ邦訳あり).

[3] Osaki, S.: "Applied Stochastic System Modeling", Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] Taylor, H. M. and Karlin, S.: "An Introduction to Stochastic Modeling", Revised Edition, Academic Press, Boston, 1994.

[5] Nelson, R.: "Probability Stochastic Processes, and Queueing Theory", Springer-Verlag, New York, 1995.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

[6] Kijima, M.: "Markov Processes for Stochastic Modeling", Chapman & Hall, London, 1997.
[7] 伏見正則: "確率と確率過程", 講談社, 1987.
[8] 森村英典, 木島正明: "ファイナンスのための確率過程", 日科技連, 1991.
[9] 宮沢政清: "確率と確率過程", 近代科学社, 1993.
[10] 尾崎俊治: "確率モデル入門", 朝倉書店, 1996.

会員各位　　1997年12月

預金口座自動振替による会費納入について（お願い）

本学会では，会費の納入に際し，会員各位の預金口座からの自動振替制度がご利用できます．この制度の概要は下記のとおりです．会費の自動振替を希望される方は綴込みの葉書にて事務局までご連絡ください．おって，「預金口座振替依頼書」等関係書類を送付いたします．本制度は，皆様方の手間を省くだけでなく，事務の簡素化にもつながりますので，多数の方がご利用くださることを願っております．

①制度の主旨
本学会の会費納入を，会員各位に代わって，金融機関が自動的に会員各位の預金口座から行うものです．

②ご利用いただける金融機関
郵便局を除く全国ほとんどの金融機関（銀行・信用金庫等）

③振替日
毎年1月20日（金融機関が休日の場合は翌営業日）

④請求書・領収書
請求書または領収書がご必要な方は，本学会事務局までご請求ください．ご必要に応じ，当事務局より送付いたします．

⑤手数料
従来どおり会員の方々のご負担とさせていただきます．（1件210円）

⑥手続きの方法
綴込みの葉書に必要事項をご記入の上，事務局あてお送りください．

⑦本件に関するお問い合わせは，本学会事務局までお願いいたします．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．