

最短時間経路問題の周辺

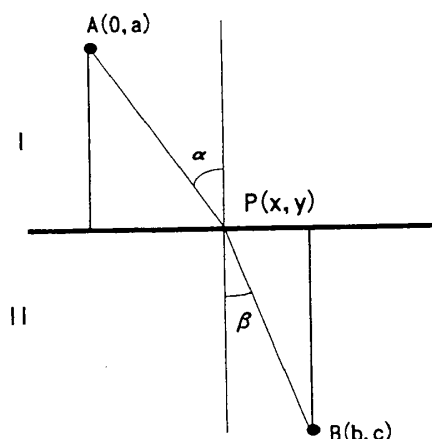
大山 達雄

1. 光の屈折と最短時間経路

光が1つの点を出発して、他の点に到達する場合、通過に要する時間が極小になるような経路、すなわち最短時間経路に沿って進むというのが、よく知られたフェルマー (Fermat) の原理である。したがって光は、等質な1つの層を進む場合には、これらの2つの点を結ぶ線分に沿って進むことになる。また光がそれぞれ等質的な2つの層I, IIを通過する場合、層Iと層IIの境界における入射角 α と反射角 β の間に次の関係が成立するというのは、スネル (Snell) の定理と呼ばれる。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad n : \text{屈折率} \quad (1)$$

本稿においては、いろいろな種類の最短時間経路問題と上のスネルの定理との関係について調べてみよう。



おおやま たつお
政策研究大学院大学政策研究科
〒338 浦和市下大久保 255

層Iを通過するときは速度 u 、層IIを通過するときは速度 v となる物体の最短時間経路すなわち点Aから点Bに至るのに要する時間

$$T = \frac{AP}{u} + \frac{PB}{v} \quad (2)$$

を最小にする最短時間経路 $A \rightarrow P \rightarrow B$ は以下の関係を満たす。

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u}{v} \quad (3)$$

上の関係が成立することを示そう。点A, B, Pの座標をそれぞれ $A(0, a)$, $B(b, c)$, $P(x, 0)$ とする。線分AP, BPの長さは $AP = \sqrt{x^2 + a^2} = r_1$, $BP = \sqrt{(x-b)^2 + c^2} = r_2$ のように与えられる。点Aから点Bに至るのに要する時間は

$$T = \frac{AP}{u} + \frac{PB}{v} = \frac{r_1}{u} + \frac{r_2}{v} \quad (4)$$

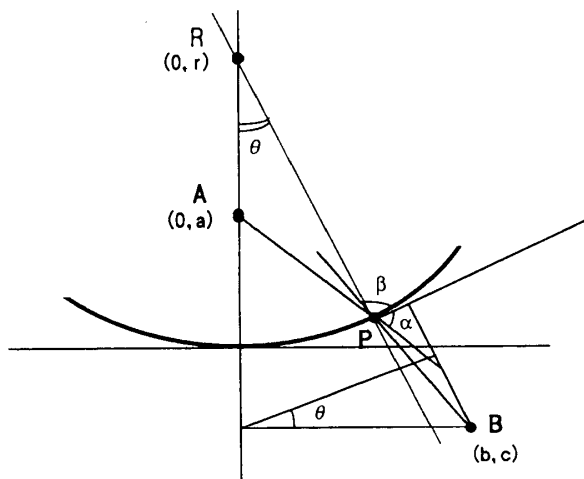
と書くことができる。したがって

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{ur_1} - \frac{b-x}{vr_2} = \frac{\sin \alpha}{u} - \frac{\sin \beta}{v} = 0$$

が満たされるとき、すなわち(3)が成立するとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は最小となる。 T の導関数の値が0となる x^* は $0 \leq x \leq b$ の範囲では唯一個存在し、その前後において T の導関数の値は負から正に変化する(高木貞治「解析概論」, p68-p69)。したがって点Aから点Bに至るのに要する所要時間は、(3)が成立するときに最小となる。

2. 円周境界ケースの最短時間経路

点A, B, R, Pの座標をそれぞれ $(0, a)$, (b, c) , $(0, r)$, (x, y) とおくと、線分AP, PBの長さは $AP = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = r_1$, $PB = \sqrt{(x-b)^2 + (y-c)^2} = r_2$ のように与えられる。したがって点Aから点Bに至るのに要する時間は、この場合にも(4)のように書くことができる。



点Pの座標を $x = r \sin \theta$, $y = r - r \cos \theta$ とおくと、 θ に関する導関数は

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{d\theta} &= \frac{r(r-a)\sin\theta}{r_1} \\ \frac{dr_2}{d\theta} &= \frac{-r\cos\theta + r(r-c)\sin\theta}{r_2} \end{aligned}$$

となる。したがってTの θ に関する導関数の値を0とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} &= \frac{1}{u} \frac{dr_1}{d\theta} + \frac{1}{v} \frac{dr_2}{d\theta} \\ &= \frac{\cos\alpha}{u} + \frac{\cos\beta}{v} = 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{\cos\alpha}{u} + \frac{\cos\beta}{v} = 0 \quad (5)$$

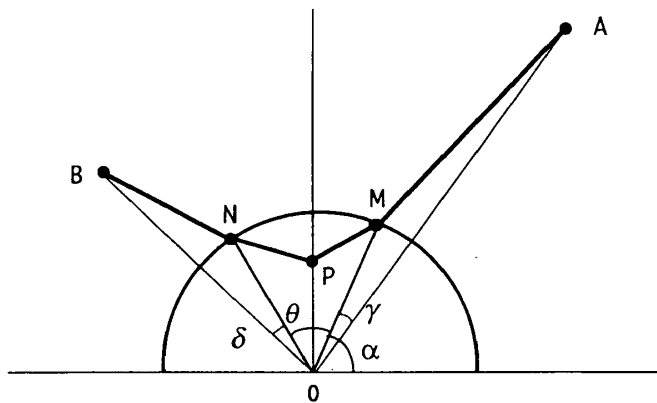
が満たされるとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は極小となる。

なお上の(5)の関係は、境界が一般曲線の場合にも成立することを付加しておこう。

3. 最短時間経路の特殊形

図に示すように点A, Bを半径Rの円周の外側の点、そして点M, Nは円周上の点、Pは円周

内の点とする。点が円周外を移動する場合の速度をu、円周上あるいは円周内を移動する場合の速度をvとする。まず点Aから出発して、円周上の点Mを通過して点Pに到着した後、再び円周上の点Nを通過して点Bに到達する経路を考えてみよう。



図中の点A, B, M, Nの極座標をそれぞれ (R_1, θ_1) , (R_2, θ_2) , (R, α) , $(R, \theta + \alpha)$ とおくと、経路 $A \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow N \rightarrow B$ のうちで所要時間が極小となるものは、これまでの結果から得られる。すなわち、まず経路 $A \rightarrow M \rightarrow P$ については、点Mにおける接線方向に関する入射角 α と反射角 β の間に(3)の関係が成立する。同様に、経路 $P \rightarrow N \rightarrow B$ については、点Nにおける接線方向に関して同様の関係が成立する。このようにして $A \rightarrow P \rightarrow B$ の間の最短時間経路が得られる。

次に点Aから出発して、円周上の点Mに到着した後、円周上を点Nまで移動し、点Bに向かう経路を考えてみよう。このとき、線分AM, NB, 弧MNの長さはそれぞれ以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} AM &= \{(R_1 \cos \theta_1 - R \cos \alpha)^2 + (R_1 \sin \theta_1 - R \sin \alpha)^2\}^{\frac{1}{2}} = r_1 \\ NB &= \{(R_2 \cos \theta_2 - R \cos(\theta + \alpha))^2 + (R_2 \sin \theta_2 - R \sin(\theta + \alpha))^2\}^{\frac{1}{2}} = r_2 \\ MN &= R\theta \end{aligned}$$

したがって点Aから点Bに至るのに要する時

間は

$$T = \frac{AM + NB}{u} + \frac{MN}{v} = \frac{r_1 + r_2}{u} + \frac{R\theta}{v} \quad (6)$$

と書くことができる。所要時間 T の θ, α に関する偏導関数を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{RR_2}{ur_2} \sin(\theta + \alpha - \theta_2) + \frac{R}{v} \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \frac{R}{u} \left\{ \frac{R_1}{r_1} \sin(\alpha - \theta_1) + \frac{R_2}{r_2} \sin(\theta + \alpha - \theta_2) \right\} \end{aligned}$$

となる。したがってこれらを0とおくと、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\sin(\theta + \alpha - \theta_2)}{t_2} + s = 0 \\ \frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \alpha} &= \frac{\sin(\alpha - \theta_1)}{t_1} + \frac{\sin(\theta + \alpha - \theta_2)}{t_2} = 0 \end{aligned}$$

ここで $s = \frac{u}{v}$, $t_1 = \frac{r_1}{R_1}$, $t_2 = \frac{r_2}{R_2}$ 。したがって以下の関係が満たされるとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は極小となる。

$$\frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = s - \frac{\sin \delta}{t_2} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{u}{R} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{\sin \gamma}{t_1} - \frac{\sin \delta}{t_2} = 0 \quad (8)$$

ここで $\delta = \theta_2 - \theta - \alpha$, $\gamma = \alpha - \theta_1$ である。したがって(7), (8)は以下のように与えられる。

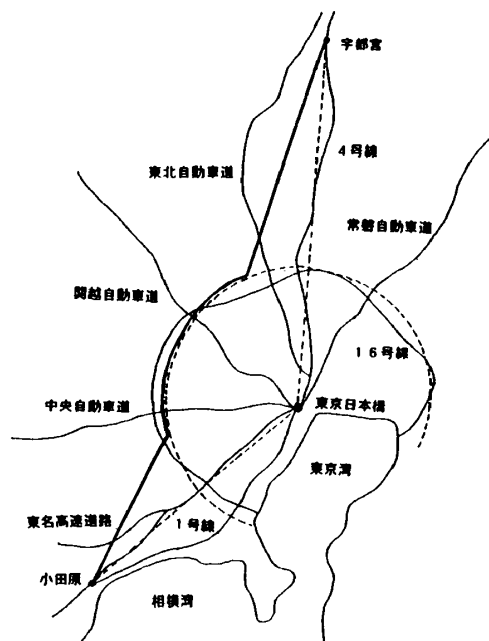
$$\frac{\sin \gamma}{t_1} = \frac{\sin \delta}{t_2} = s$$

4. まとめ

本稿では、フェルマーの原理に基づく光の屈折と最短時間経路との関連について考慮した。最短時間経路あるいは最短経路の問題はわれわれの日常生活の中でもしばしば現れる現実的、実際的な問題である。たとえば、ここで取り上げた最短時間経路の特殊形の問題について、現実の問題を考えてみよう。

宇都宮、小田原間を首都圏環状線の国道16号を通過して行く場合の最短時間経路を求めてみよう。この場合、 $0.64 \leq t_1 \leq 0.93$, $0.51 \leq t_2 \leq 0.87$, $0.069\pi \leq \theta \leq 0.72\pi$ となる。した

がって、 $s = 1$ とすると、 $\theta_m = \theta_n = \frac{\pi}{2}$, $\theta = 0.069\pi = 12.5'$ のときに最短時間経路が得られる。このことは、宇都宮を出発して、首都圏環状線の国道16号に川越あたりで入った後、立川あたりでそれを出て、小田原に向かうことを意味する。また $s = 0.5$ 、すなわち環状線の国道16号上の速度が環状線の外の速度の2倍の場合には、 $\theta_m = \theta_n = \frac{5\pi}{6}$ のときに最短時間経路が得られる。このことは、宇都宮を出発して、埼玉県蓮田あたりで首都圏環状線の国道16号に入り、神奈川県相模原あたりでそれを出て、小田原に向かうことを意味する。



本稿で取り上げた最短時間経路の一般形について考えてみよう。ここでは層の数が2個以下の場合、そして点の数が2個の場合の最短時間経路を考えた。これに対して、層の数あるいは点の個数がより一般的な場合の問題は下表のように整理することができる。たとえば層の数が1で点の個数が3以上の点を結ぶ最短経路を求める問題はスタイナー(Steiner)問題と呼ばれ、古くから多くの研究者によって考えられてきた問題であるが、現在でもなお解くのが非常に難しいとされている問題である。

層・点	2	3以上
1	線分	Steiner 木問題
2	Snellの定理	?
3以上	?	?