教養講座

確率モデルとその応用 I

尾崎　俊治

1. ORと確率

1.1 ORと確率

オペレーションズ・リサーチ(OR)は人間の意志決定によって影響されるシステムの挙動を解析し，予測する定量的モデルを構築して，それを活用する学問である．しかし，現実のORのイメージはそこで使われる手法のみが知られている．ORの手法はあくまで手段であって，ORは広義のシステムを定量的に解析し，予測することによってできるだけ効率的な意志決定を下すことに意義がある．

定量的に解析し，予測するためには既によく知られたORの手法は当然知るべきである．ORの各手法を大別すれば，

・**最適化**

線形計画

非線形計画

整数計画

ダイナミック・プログラミング

・**応用確率モデル**

待ち行列理論

在庫モデル

信頼性モデル

シミュレーション

となる．もちろん，上記に述べた以外にもいろいろな手法がある．上記で述べた手法のうち最適化は主に**数理計画** (mathematical programming) とよばれるものであり，いわゆる**決定論的モデル** (deterministic model) である（ただし，確率を考慮した確率的計画もある）．一方，応用確率モデルはいわゆる**確率論的モデル** (probabilistic model) であり，その基礎となる考え方は**不確実性** (uncertainty) が存在することである．例えば，M/M型待ち行列モデルは客の到着はポアソン過程に従い，サービス時間は指数分布に従う待ち行列モデルであり，客の到着もサービス時間もランダムである．在庫モデルは決定論的モデルも確率論モデルもある．確率論的在庫モデルにおいては品物の需要数が確率的であるようなモデルである．信頼性モデルはその多くが確率論的モデルであり，アイテムの信頼度が確率そのものであるとしたモデルと，アイテムの寿命時間が確率分布としたモデルがある（信頼性モデルにおいて構造のみに着目した決定論的モデルもある）．

本稿ではORのための確率モデルについて易しく解説する．今回と次回は主に確率論の入門とポアソン過程，再生過程および出生死滅過程について簡単にまとめる．そして，次々回はORの手法としてよく知られた在庫モデル，信頼性モデルそして待ち行列理論について解説する．

1.2 事象と確率

毎日の生活で天気予報の降雨確率はわれわれにとって重要な情報である．コイン投げ，サイコロ投げはもちろんのこと外国為替の交換レート，株価変動などの結果をあらかじめ知ることはできない．しかし，いずれはその結果を知ることができる．このようにあらかじめ結果はわからないが，結果を数量的に予測することは可能である．偶然の現象を数学として体系化したのが**確率論** (theory of probability) である．実験や観測を行うことを**試行** (trial) といい，その起こりうる結果を**標本点** (sample point) という．あらゆる可能な標本点の集合を**標本空間** (sample space) という．通常，標本点を ω，標本空間を Ω で表し，ω が集合 Ω に属

おさき　しゅんじ　広島大学工学部
〒739-8527 東広島市鏡山 1-4-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

することを $\omega \in \Omega$と表す.

例 1.1 コインを 1 個投げれば，表 (head) か裏 (tail) のどちらかであるから，$\Omega = \{H, T\}$ となる．$\omega = H$ はコインが表である標本点を表す.

例 1.2 サイコロを 1 個投げる試行を考えれば，標本空間は $\Omega = \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6} \right\}$ となる．ここで，$\boxed{i}$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ はサイコロの目が i であることを表す.

標本空間の任意の部分集合は**事象** (event) と呼ばれる．事象の間の演算はよく知られた集合の演算と同様である．ここで，標本空間 Ω，空集合 ϕ も事象である.

任意の事象 A, B について次の定義を与える.

定義 1.1 事象 A, Bについて

(i) 和事象 $A \cup B = \{\omega : \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$

(ii) 積事象 $A \cap B = \{\omega : \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$

(iii) 余事象 $A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$ (事象 A に属さない標本点の集合)

(iv) 排反事象 $A \cap B = \phi$

と定義する．特に，$A \cap B = \phi$ のとき，事象 A, Bは互いに排反であるという．さらに，Ω は**全事象** (total event) とよばれる.

定義 1.2 標本空間Ωの上の任意の事象 A に対し実数値関数 $P\{A\}$ が定義され，

(i) $0 \leq P\{A\} \leq 1$

(ii) $P\{\Omega\} = 1$

(iii) 互いに排反な事象 $A_1, A_2, \cdots$に対し，

$$P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n\}$$

を満たすならば，$P\{A\}$ は事象 A の確率とよばれる.

確率は上記の (i)〜(iii) を満たすよう与えられたものであるので**確率の公理**と考えてもよい.

例 1.3 コイン投げにおいては，コインに偏りがなければ

$$P\{H\} = P\{T\} = \frac{1}{2}$$

例 1.4 偏りのないサイコロ投げにおいては

$$P\{\boxed{i}\} = \frac{1}{6} \quad (i = 1, 2, \cdots, 6).$$

$A \subset B$は A の標本点は必ず Bに属することを表す．さらに，$A \setminus B = A \cap B^c$は A に属するが，Bには属さない標本点の集合を表し，**差集合** (differençe set) とよばれる.

定理 1.1 任意の事象 A, Bに対し

(i) $P\{A^c\} = 1 - P\{A\}$，特に $P\{\phi\} = 0$

(ii) $A \subset B$ならば，$P\{A\} \leq P\{B\}$

(iii) $P\{A \setminus B\} = P\{A\} - P\{A \cap B\}$

(iv) $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

1.3 条件付き確率

ある事象 Bが与えられたときの事象 A の条件付き確率 $P\{A|B\}$ は次のように定義される.

定義 1.3 任意の事象 A, Bに対して，$P\{B\} > 0$ ならば，事象 Bが与えられたときの事象 A の**条件付き確率** (conditional probability) は

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

によって定義される.

上式は

$$P\{A \cap B\} = P\{A|B\}P\{B\}$$

と書くこともできる.

任意の事象 A, Bに対し，$B \cup B^c = \Omega$ であるから，次の定理を得る.

定理 1.2 任意の事象 A, Bに対し，$P\{B\} > 0$, $P\{B^c\} > 0$ ならば，

$$P\{A\} = P\{A \cap B\} + P\{A \cap B^c\}$$
$$= P\{A|B\}P\{B\} + P\{A|B^c\}P\{B^c\}$$

となる.

この定理を拡張すれば，次のよく知られた**全確率の公式** (law of total probability) を得る.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

定理 1.3 A, B_1, B_2, $\cdots$, B_n は事象とし，B_1, B_2, $\cdots$, B_n は互いに排反であるとする．すなわち，$B_i \cap B_j = \phi\ (i \neq j)$ とする．さらに，

$$A \subset (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$$

ならば，

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{A|B_i\}P\{B_i\}$$

となる．ただし，$P\{B_i\} > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．

定理1.3の全確率の公式を用いれば，次の有益なベイズの定理 (Bayes' theorem) を得る．

定理 1.4 A, B_1, B_2, $\cdots$, B_n は事象とし，B_1, B_2, $\cdots$, B_n は互いに排反であるとする．すなわち，$B_i \cap B_j = \phi\ (i \neq j)$ とする．さらに，

$$A \subset (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)$$

ならば，

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{A|B_i\}P\{B_i\}}{\sum_{j=1}^{n} P\{A|B_j\}P\{B_j\}}$$

ここで，$P\{B_1\}, P\{B_2\}, \cdots, P\{B_n\}$ はあらかじめ与えられるもので**事前確率** (prior probability) とよばれる．それに対して $P\{B_i|A\}$ は**事後確率** (posterior probability) とよばれる．事後確率には結果 A が含まれているから，A をデータと解釈すれば，ベイズの定理を基礎にしたベイズ統計学 (Bayesian statistics) が展開できる．

事象の独立性は次のように定義できる．

定義 1.4 任意の事象 A, B に対し，

$$P\{A \cap B\} = P\{A\}P\{B\}$$

あるいは $P\{B\} > 0$ のとき条件付き確率を用いて，

$$P\{A|B\} = P\{A\}$$

ならば，事象 A, B は**独立**であると定義する．

定義 1.5 (独立事象の確率) A_1, A_2, $\cdots$, A_n は標本空間 Ω の上の事象とする．A_1, A_2, $\cdots$, A_n があらゆる $A_i \in \Omega\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して

$$P\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} = P\{A_1\}\ P\{A_2\}\ \cdots\ P\{A_n\}$$

ならば，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ は独立であると定義する．この事象は**独立試行**あるいは**繰り返し試行**とよばれる．

例 1.5 例 1.1 の公平なコインを n 回投げる試行は独立試行であり，n 回表の出る確率は

$$P\{(\overbrace{HH\cdots H}^{n})\} = \frac{1}{2^n}$$

で与えられる．

1.4 組合せと確率

標本空間Ωの標本点が有限ならば，その数を $|\Omega|$ で表す．そのとき，事象 A に含まれる標本点の数を $|A|$ で表せば，事象 A の確率は

$$P\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

によって計算できる．

n, kを自然数として $n \geq k$ とする．n 人の中から k 人を並べる並べ方は**順列** (permutation) とよばれ，

$${}_nP_k = (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

となる．例えば，野球チームの打順は 9 人のバッターの並べ方であるから

$${}_9P_9 = (9)_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$$

$$= 3628800$$

となり，非常に多くの並べ方が存在する．ここで 9! は“9 の階乗”と読む．

n, kを自然数として，$(n)_k$ を定義したが，a を実数，k を自然数として

$$(a)_k = \overbrace{a(a-1)\cdots(a-k+1)}^{k}$$

と定義しよう．

例 1.6

$$\left(\frac{1}{2}\right)_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{4},$$

$$(-1)_3 = (-1)(-2)(-3) = -6,$$

$$(-1)_k = (-1)(-2)\cdots(-1-k+1)$$

$$= k \cdot (k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot (-1)^k$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$= (-1)^k k!.$$

一般に，正整数kに対して

$$(k)_k = k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1 = k!$$

と定義したが，$k=0$に対しては

$$(0)_0 = 0! = 1$$

と約束する．階乗の記号を用いれば，

$$(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

と書くことができる．

n人からk人を選ぶ選び方はnからkの**組合せ** (combination) とよばれ

$$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

となる．

例 1.7 3人をa, b, cとすれば，3人から2人を並べる順列は$(3)_2 = 6$通りで

$$(a\,b),\ (a\,c),\ (b\,a),\ (b\,c),\ (c\,a),\ (c\,b)$$

となる．ところが，組合せの場合は順番は無視するから，

$$(a\,b) = (b\,a),\quad (b\,c) = (c\,b),\quad (a\,c) = (c\,a)$$

となり

$$\binom{3}{2} = {}_3C_2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3\text{ 通り}$$

の

$$(a\,b),\ (b\,c),\ (c\,a)$$

となる．

一般に，**二項係数** (binomial coefficient) は次のように定義される．

定義 1.6 aを実数，kを非負の整数とすれば，二項係数

$$\binom{a}{k} = {}_aC_k = \frac{(a)_k}{k!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

と定義する．さらに，kが負のときは

$$\binom{a}{k} = 0$$

と約束する．

当たり玉とはずれ玉の入った壷から目隠しをして玉を取り出す試行を考えよう．玉を1つずつ取り出して，元に戻さなければ，**非復元抽出** (sampling without replacement) とよばれる．一方，1つずつ取り出して元に戻せば，**復元抽出** (sampling with replacement) とよばれる．

例 1.8 赤玉がn_1個，黒玉が$(n-n_1)$個入った壷を考える．復元抽出によってr個の玉を取り出すとすれば，そのr個のうちk個が赤玉（当然$(r-k)$個は黒玉）の出る事象Aの確率を求めよう．1回で赤玉の出る確率は$p = n_1/n$であり，黒の出る確率は$1-p = 1-n_1/n$である．r個のうちk個赤玉の出る確率は復元抽出であるから，n個の中からr個取り出す組合せは$n\cdot n\cdots n = n^r$である．すなわち，$|\Omega| = n^r$．一方，r個取り出すとき，そのうちk個が赤玉で，$(r-k)$個が黒玉である標本点の数は

$$|A| = \binom{r}{k} n_1^k (n-n_1)^{r-k}$$

となるから，

$$\begin{aligned} P\{A\} &= \frac{|A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\binom{r}{k} n_1^k (n-n_1)^{r-k}}{n^r} \\ &= \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k} \end{aligned}$$

となる．この分布は**二項分布** (binomial distribution) とよばれる．

例 1.9 例 1.8 と同様な問題の設定であるが，非復元抽出としよう．n個の玉からr個の玉を取り出すから$|\Omega| = \binom{n}{r}$となる．一方，n_1個の赤玉からk個の赤玉を取り出す組合せは$\binom{n_1}{k}$であり，$(n-n_1)$個の黒玉から$(r-k)$個の黒玉を取り出す組合せは$\binom{n-n_1}{r-k}$となる．これらの事象は独立であるから，

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$|A| = \binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}$ となる．したがって

$$P\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_1}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

となる．この分布は**超幾何分布** (hypergeometric distribution) とよばれる．

さて，$(1+x)^n$の展開を考えよう．

$$(1+x)^n = \overbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}^{n}$$

となるから，この右辺の$x^k(k=0,1,2,\ldots n)$の係数はちょうどnからkを取り出す組合せになるので

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \qquad (n\text{は自然数})$$

となる．この展開は**二項展開**とよばれ，二項係数によって書き表せる．

例 1.10 偏りのないコインを投げて，表が出たら1単位，裏が出たら-1単位ずつ数直線を動くゲームを考える．$2n$回（偶数回）でちょうど元の位置にいる事象Aの確率を求めよう．$|\Omega| = 2^{2n}$であり，$2n$回以後に元の位置にいるためには左右にそれぞれn回動くときであるから，

$$|A| = \binom{2n}{n}$$

となる．事象Aの確率は

$$P\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

となる．もちろん，例1.8の二項分布から右あるいは左へ行く確率はそれぞれ1/2であるから，

$$P\{A\} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

として計算してもよい．これは**ランダム・ウォーク** (random walk) として確率論でよく知られたモデルである．

組合せを計算するための基本定理を以下にまとめる．

定理 1.5 n，kは非負の整数で，$n \geq k \geq 0$とする．

(i) n個の中からk個を取り出す復元抽出の数はn^kとなる．

(ii) n個の中からk個を順に並べる順列は$(n)_k$となる．

(iii) n個の中からk個を取り出す組合せは$\binom{n}{k}$となる．

(iv) n個の中から同じものを何度でも使ってよいとしてk個を取り出す組合せは

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

となる．

例 1.11 $n = k = 3$とすれば，

(i) $3^3 = 27$通り

(ii) $3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$通り

(iii) $\binom{3}{3} = 1$通り

(iv) $\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$通り

となる．a,b,cを3個のものとすれば，

$(a\,a\,a)$，$(b\,b\,b)$，$(c\,c\,c)$，$(a\,a\,b)$，$(a\,b\,b)$，

$(b\,b\,c)$，$(b\,c\,c)$，$(a\,a\,c)$，$(a\,c\,c)$，$(a\,b\,c)$

の計10通りとなる．

例 1.12（誕生日問題）クラスにk人の学生がいる．各学生の誕生日は同等に確か（すなわち，1/365の確率で一様分布）で，うるう年は無視する．すべてのクラスの学生の誕生日の異なる事象の確率を求めよう．明らかに，365通りあるから，$|\Omega| = 365^k$となる．一方，k人がすべて異なる順列は，$|A| = (365)_k$となるから，

$$P\{A\} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(365)_k}{365^k}$$
$$= \left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{365}\right)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 365)$$

となる．例えば，$k = 20$とすれば0.5886，$k = 30$とすれば0.2937，$k = 40$とすれば，0.1204となり，この

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

確率は以外に小さい．30～40人のクラスで，同じ誕生日の学生がいても決して偶然ではない．

さて，定義1.6において二項係数はaを実数，kを非負の整数として定義した．そこで，nを自然数として$a=-n$とすれば，二項係数は

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}\\ &= (-1)^k\frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k}\\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{n-1}\end{aligned}$$

となる．この$\binom{-n}{k}$は**負の二項係数** (negative binomial coefficient) とよばれる．負の二項係数を用いれば，より一般の二項展開

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(-x)^k\end{aligned}$$

が得られる．ここで，和が有限でなく，無限になることに注意．

例1.13 $n=1,2$とすれば，$|x|<1$として

$$(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\cdots,$$

$$\begin{aligned}(1+x)^{-2} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{k}(-x)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-x)^k\\ &= 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\end{aligned}$$

となる．

一般に，定義1.6の二項係数を用いて，$|x|<1$として

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k$$

と二項展開できる．右辺は一般に無限和となる．この公式はニュートンの二項公式とよばれる．

さて，定理1.5で与えた結果を次の記号を導入して書き直すこともできる．

$$<n>_k = n^k$$

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k} = \binom{-n}{k}$$

この記号を用いて定理1.5を書き直せば次の表のようになる．

表1.1 復元抽出と非復元抽出の順列と組合せ

	復元抽出	非復元抽出
順列	$<n>_k = n^k$	$(n)_k$
組合せ	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle$	$\binom{n}{k}$

例1.14（誕生日問題）例1.12の誕生日問題は表1.1を参照すれば，すべてのk人の誕生日が異なる確率は非復元抽出と復元抽出との比になる．そこで，一般化された誕生日問題は

$$\begin{aligned}f_p(n,k) &= \frac{(n)_k}{<n>_k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

となり，明らかに$\lim_{n\to\infty} f_p(n,k)=1$となる．従って，$n$が十分大きければ，$k$人の順列がすべて異なる確率は1に近づく．しかし，例1.12で示したとおり$n=365$は十分に大きな数でないことを意味する．

例1.15 表1.1を参照すれば，次の関数

$$f_c(n,k) = \frac{\left\langle {n \atop k} \right\rangle}{\binom{n}{k}}$$

はn種類の異なるボールを復元抽出と非復元抽出でランダムにk個選んだときの組合せの比を表わす．この場合

$$\begin{aligned}f_c(n,k) &= \left(1+\frac{k}{n-1}\right)\left(1+\frac{k}{n-2}\right)\\ &\quad\cdots\left(1+\frac{k}{n-(k-1)}\right)\end{aligned}$$

となり，任意の固定したkに対して，$\lim_{n\to\infty} f_c(n,k)=1$となることは明らかである．

紙面の都合で，参考文献を次回に回す．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．