研究レポート

無人ATMにおける最適予備キャッシュボックス数

中村 正治，三道 弘明，中川 覃夫

1. はじめに

近年の銀行は，無人のＡＴＭを用いて土曜，日曜日にも預金および引き出しのサービスを実施している．ＡＴＭ内部には，手提げ金庫のような箱が設置してあり，この箱の中に現金を保管するような仕組みになっている．以後このような現金保管用の箱をキャッシュボックスと呼ぶこととする．

ＡＴＭには，その内部に通常預金には預金専用，引き出しには引き出し専用のそれぞれ１個のキャシュボックスが設置されているタイプのものと，通常預金された現金を引き出しにも使用する現金リサイクル型の２種類のタイプがある．ここでは前者のタイプを対象として考えることとする．

前者のタイプのＡＴＭにおいて，引き出し専用のキャッシュボックスには，予め一定額の現金が保管されており，中の現金が消費し尽くされると，そのＡＴＭでの引き出しサービスは停止することとなる．顧客の需要があるにもかかわらず引き出し専用の現金が消費し尽くされた場合には，空のキャッシュボックスを新たなキャッシュボックスに取り替えることでサービスを再開することができる．以降では，引き出し専用のキャッシュボックスに焦点を絞り，これを単にキャッシュボックスと呼ぶこととする．また，現金についても同様に，引き出し専用の現金を意味することとする．

平日の通常支店では，行員がキャッシュボックスに現金を補充しているが，初めから無人のＡＴＭや，通常支店での土，日曜，祝日には，ＡＴＭの現金がなくなると，予め契約を結んでいる警備会社(これをキャッシュボックス交換業者と呼ぶこととする)などにその旨連絡されるようになっている．連絡を受けた交換業者は，前もってその支店専用に確保してあった予備のキャッシュボックスを現地に持参し，空のキャッシュボックスと新たなそれとを交換することで，現金引き出しサービスが再開される．

なお，ＡＴＭが複数台設置されている場合には，すべてのＡＴＭの現金が消費し尽くされるまで，現金をもたないＡＴＭのサービスを中止し，残りのＡＴＭでサービスを行っている．この後すべてのＡＴＭの現金が消費し尽くされると，１台のＡＴＭのキャッシュボックスが予備のキャッシュボックスと交換され，以降はこの１台のＡＴＭのみによるサービスが再開される．

以上に述べたような状況の下，無人ＡＴＭの運用に関して当該銀行には，以下の３種類の費用が発生する．

(1) 予備のキャッシュボックスのために現金を確保することで，余剰資金となり機会損失費用が発生する．

(2) 予備のキャッシュボックスの現金も消費し尽くした場合，顧客は他の支店あるいは他の銀行のＡＴＭに出向き，現金を引き出すこととなる．この場合，他行のＡＴＭを利用すると，顧客が手数料を支払うだけではなく，当該銀行も引き出し金額に応じた費用を他行に支払わなければならない．また，このような状況下では，経理上の費用を支払うだけでなく，当該銀行の信用が他行に移行したとも考えられ，信用失墜による費用が発生する．以下ではこれらを総称して品切れ費用と呼ぶ．

このことは同時に，他行の契約者が何らかの理由で，当該銀行のＡＴＭを利用すると，顧客が支払う手数料や他行から利用金額に応じて収入

なかむら しょうじ 名古屋銀行システム部
〒468 名古屋市天白区鴻ノ巣 1-501
さんどう ひろあき 流通科学大学情報学部
〒651-21 神戸市西区学園西町 3-1
なかがわ としお 愛知工業大学工学部
〒470-03 豊田市八草八千草 1247
受付 96.11.18 採択 97.4.10

が得られるばかりでなく，他行の信用をも勝ち取っていることを意味する．

(3) キャッシュボックス交換業者に対しては，固定的な契約料以外に，キャッシュボックス毎に配達，交換手数料が発生する．

以上に述べた状況では，各支店毎に予備のキャッシュボックスを何個用意すればよいかが問題となる．本研究では，このような問題に対し，キャッシュボックスの最適予備数を決定するためのモデルを提案する．

2. 期待費用

以下のように記号を定義する．

A 当該支店のＡＴＭに予め確保された現金．

a キャッシュボックス１個当りに収納可能な現金

c_1 現金を予備キャッシュボックス用に確保することによる単位キャッシュ当り機会損失費用

c_2 当該銀行の契約者が他行のサービスを受けることで発生する単位キャッシュ当り品切れ費用

c_3 交換業者に対して支払うべきキャッシュボックス１個当り配達，交換手数料

$F(x)$ 当該支店での一日当り引き出し需要量の総額xに対する累積分布関数

$f(x)$ $dF(x)/dx$

α xのうち他行契約者による引き出し金額の割合 $(0<\alpha<1)$

β 当該支店のキャッシュがない場合に，引き出しを見送るかあるいは当該銀行の他の支店を利用する確率 $(0<\beta<1)$

上記のような記号の下，予備キャッシュボックスをn個としたときの期待費用は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
C(n) &= nc_1a \\
&+ c_2\left\{\int_{A+na}^{\infty}\Big[(1-\alpha)(1-\beta)(x-A-na)\right. \\
&- \left.\alpha(A+na)\Big]dF(x) - \int_0^{A+na}\alpha x dF(x)\right\} \\
&+ c_3\Big[\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)\int_{A+ia}^{A+(i+1)a}dF(x) \\
&\quad +n\int_{A+na}^{\infty}dF(x)\Big], \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

但し，次式のように定義することとする．

$$\sum_{i=0}^{-1}\cdot = 0 \qquad (2)$$

式(1)において，右辺第１項は，予備キャッシュボックス用資金として合計naを確保することによる機会損失費用を表している．これに対して第２項は，予備キャッシュボックスの資金も含めて，無人ＡＴＭの資金を消費し尽くしたことで，顧客が他行のＡＴＭに流れることによる費用から，他行の契約者が当該銀行を使用することによる収入を差し引いたものである．但し，ここでは，他行の契約者が当該銀行を利用したときに契約者自身が負担する手数料は実費とみなし，当該銀行の利益としては考えていない．また，第３項は，交換業者に支払うべきキャッシュボックスの配達ならびに交換手数料を表している．

なお，上に示した定式化は，一種の新聞売り子問題[1,2,3]のそれになっており，式(1)の右辺第３項が，これまでの古典的新聞売り子問題には見られなかったものである．

ここで

$$
\begin{aligned}
\int_0^y x dF(x) &= xF(x)|_0^y - \int_0^y F(x)dx \\
&= -y\overline{F}(y) + \int_0^y \overline{F}(x)dx \qquad (3)
\end{aligned}
$$

なる関係を用いて式(1)を整理すると

$$
\begin{aligned}
&C(n) \\
&= nc_1a \\
&+ c_2\left\{[1-(1-\alpha)\beta]\int_{A+na}^{\infty}\overline{F}(x)dx - \alpha\mu\right\} \\
&+ c_3\sum_{i=0}^{n-1}\overline{F}(A+ia), \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (4)
\end{aligned}
$$

を得る．ここに

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^{\infty}\overline{F}(x)dx \qquad (5) \\
\overline{F}(x) &= 1-F(x) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

であり，μは一日当りの平均引き出し需要金額を表す．

以上のことから，式(4)の$C(n)$を最小にするような$n=n^*$が，最適予備キャッシュボックス数である．

3. 最適予備キャッシュボックス数

式(4)の差分を$\Delta C(n) \equiv C(n+1)-C(n)$と書くこととし，$\Delta C(n) \geq 0$とおくと

$$\frac{c_1a + c_3\overline{F}(A+na)}{\int_{A+na}^{A+(n+1)a}\overline{F}(x)dx} \geq c_2\gamma \qquad (7)$$

を得る．但し，γは次式で与えられる．

$$\gamma = 1-(1-\alpha)\beta \tag{8}$$

ここで

$$y \equiv A+na \tag{9}$$

とおくと，$y \geq A$ である．この上で，式(7)の左辺を $L(y)$ とおくと，式(7)は

$$L(y) \equiv \frac{c_1 a + c_3 \overline{F}(y)}{\int_y^{y+a} \overline{F}(x)dx} \geq c_2\gamma \tag{10}$$

となる．

$L(y)$ について調べると

$$\lim_{y\to+\infty} L(y) = +\infty \tag{11}$$

$$\begin{aligned} L'(y) &= \frac{F(y+a)-F(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx}\left[\frac{c_1 a + c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx} \right. \\ &\quad \left. -\frac{c_3 f(y)}{F(y+a)-F(y)}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．

ここで，$F(x)$ に対して，信頼性理論でいうところの IFR(Increasing Failure Rate)[4-7] あるいは CFR(Constant Failure Rate)[4-7] を考える．すなわち $f(x)/\overline{F}(x)$ が x に関して広義の単調増加である場合を考える．このとき

$$\frac{f(x)}{\overline{F}(x)} \geq \frac{f(y)}{\overline{F}(y)}, \quad y \leq x \leq y+a \tag{13}$$

が成立することから

$$\begin{aligned} \frac{c_1 a + c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a}\overline{F}(x)dx} &\geq \frac{c_1 a + c_3\overline{F}(y)}{\int_y^{y+a} f(x)\frac{\overline{F}(y)}{f(y)}dx} \\ &= \frac{\left[\frac{c_1 a}{\overline{F}(y)}+c_3\right]f(y)}{F(y+a)-F(y)} \\ &> \frac{c_3 f(y)}{F(y+a)-F(y)} \end{aligned} \tag{14}$$

が成り立つ．したがって

$$L'(y) > 0 \tag{15}$$

が成り立ち，$L(y)$ はyに関して単調増加である．

式(11)，(15)より，式(10)を満たすyが存在することがわかる．よって，式(10)を満足するyの最小値から最適予備キャッシュボックスの数n^*を算出することができる．

以上のことから，$F(x)$ がIFRあるいはCFRであるときの最適方策は

(1) $L(A) = [c_1 a + c_3\overline{F}(A)]/\int_A^{A+a}\overline{F}(x)dx < c_2\gamma$ならば，式(7)を満たす最小の $n^* \geq 1$ が存在する．

(2) $L(A) = [c_1 a + c_3\overline{F}(A)]/\int_A^{A+a}\overline{F}(x)dx \geq c_2\gamma$ならば，式(7)を満たす最小の n は $n^*=0$ である．

4. 数値例

本章では，前章に展開したモデルに対する数値例を示す．ここでは，引き出し需要金額の分布として，確率密度関数が次式で与えられる指数分布を考える．

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \tag{16}$$

なお，指数分布はCFRであるので，前章に示したように，$[c_1 a + c_3\overline{F}(A)]/\int_A^{A+a}\overline{F}(x)dx < c_2\gamma$であれば，式(7)を満足する最小の $n^* \geq 1$ が存在する．

引き出し需要金額の確率密度関数が，式(16)の指数分布で与えられるとき，式(4)の期待費用は

$$\begin{aligned} C(n) &= nc_1 a \\ &+ c_2\left[\frac{\gamma}{\lambda}e^{-\lambda(A+na)} - \alpha\mu\right] \\ &+ c_3 e^{-\lambda a}\frac{1-e^{-n\lambda a}}{1-e^{-\lambda a}} \end{aligned} \tag{17}$$

となり，式(7)は

$$\frac{\lambda\left[c_1 a + c_3 e^{-\lambda(A+na)}\right]}{e^{-\lambda(A+na)}\left(1-e^{-\lambda a}\right)} \geq c_2\gamma \tag{18}$$

となる．ここに，γは式(8)に定義したとおりである．

表1に，$\alpha=0.4$，$\beta=0.6$ とした場合の最適予備キャッシュボックス数と，最適解に対する期待費用の値を示す．表1においては，c_2以外のパラメータは現実的な値を用いているが，品切れ費用であるc_2の値は種々に変化させてある．現実的な予備キャッシュボックス数が1ないし2であることを考えると，表1においては，$c_2=0.002$ の場合が現実的であることがわかる．

表1において，$C(n^*)$ の値が負となっているのは，他行契約者の利用による利益(他行にとっての品切れ費用)が大きく，式(17)の右辺第2項の値が負となるためである．図1に一例として，式(17)の右辺のそれぞれの項の振舞と，その合計である $C(n)$ の振舞を示す．図1より，式(17)の右辺第1項(c_1に関係した項)と第3項(c_3に関係した項)は n に関して単調増加であることが読みとれる．しかし，第2項(c_2に関係した項)は n に関して単調減少であり，しかも負の値をとっている．これは，n を大きくするに伴い，他行との契約者が当該銀行を利用することによる利益が大きくなるからである．

表 1: 最適予備キャッシュボックス数 ($\alpha = 0.4, \beta = 0.6$)

c_1	0.00008					0.0001				
c_2	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005
c_3	1									
A	1500									
a	1500									
λ	0.000333									
n^*	0	2	4	5	6	0	2	4	5	5
$C(n^*)$	-0.0355	-0.3288	-1.3143	-2.4027	-3.5254	-0.0355	-0.2688	-1.1943	-2.252	-3.3571

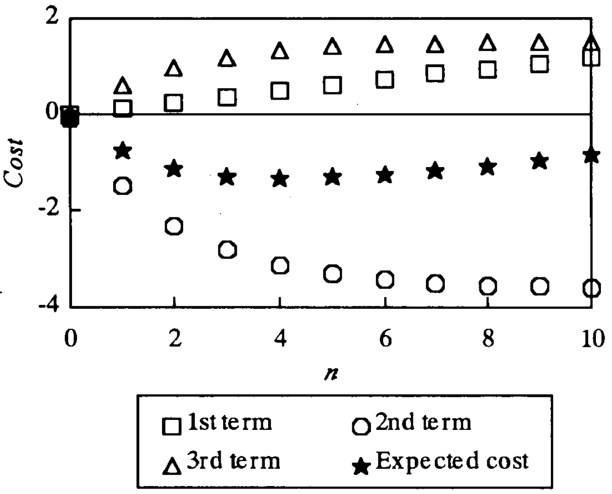

図 1: 期待費用の成分 ($c_1 = 0.00008$, $c_2 = 0.003$)

5. おわりに

本稿では，無人ATMのために準備すべきキャッシュボックス数を決定するためのモデルを提案した．ここでは，一日当りの引き出し需要金額に対して一般の確率分布を仮定し，次の３種類の費用を考慮した期待費用を定式化した．３種類の費用とは，キャッシュボックス用に余剰資金を確保するための機会損失費用と，ATMの現金が消費し尽くされたため，当該銀行の契約者が他行のATMを利用することで発生する手数料や信用を失墜することで発生する費用を総称した品切れ費用，また，交換したキャッシュボックス数に比例して発生するキャッシュボックス交換業者への手数料である．次いで，期待費用を最小にするという意味での最適キャッシュボックス数の存在条件を明らかにし，１日当りの引き出し需要金額の分布が指数分布である場合の数値例を示した．

なお，本稿では指数分布を用いた数値例を示したが，現実には１日当りの引き出し需要量金額に関するデータを集計し，その分布を同定することが必要である．同定された分布がIFRやCFRである場合には，本稿の解析結果をそのまま適用可能であるが，そうでない場合には数値的な検討が必要である．また，一日当りの引き出し需要量の分布を，Kaplan–Meier法等のノンパラメトリックな推定法を用いて同定する場合については，今後の課題としたい．最後に，本稿をまとめるに当り，有益なコメントを頂いたレフェリーに感謝する．

参考文献

[1] 近藤次郎， ＯＲライブラリー３：数学モデル入門，日科技連，1974.

[2] 牧野都治，牧野京子: パソコンによるＯＲ，朝倉書店，1985.

[3] 小和田正，加藤豊，例解ＯＲ:意思決定のアプローチ，実教出版，1988.

[4] Barlow, R.E. and Proschan, F: *Mathematical theory of reliability*, Wiley, New York, 1965.

[5] 三根久，河合一，信頼性·保全性の数理，朝倉書店，1982.

[6] 三根久，河合一，信頼性·保全性の基礎数理，日科技連，1984.

[7] 市田嵩，鈴木和幸，信頼性の分布と統計，日科技連，1984.