ORメモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた智恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

二部グラフにおける最大重み閉包問題

古林 隆，佐藤 誠，光森 誠伸

概要 修理員の携帯道具選択問題や貨物輸送のターミナル設置問題に応用できる二部グラフにおける最大重み閉包問題を定義し，それを二部グラフにおける最大流問題に変形して解く方法を示す．

1．はじめに

修理員の携帯道具選択問題や貨物輸送のターミナル設置問題では，道具やターミナルの組合せを大きくすると，利益も大きくなるが，費用もかかる．このような場合に，最適な組合せを求める問題は，二部グラフにおける最大重み閉包問題になる．そこで，それを二部グラフにおける最大流問題に変形して，最適解を求めることにする．

2．二部グラフにおける最大重み閉包

2つの点の集合N_1，N_2と枝の集合$B \subset N_1 \times N_2$を有する二部グラフが与えられているとする．さらに，点$i\,(i \in N_1)$には，正の重みがw_{1i}，点$j\,(j \in N_2)$には，非正の重みw_{2j}が，付与されているとする．

点の集合(S_1, S_2) $(S_1 \subset N_1, S_2 \subset N_2)$が，次の条件を満たすとき，閉包であるという．

$$i \in S_1,\ (i, j) \in B \text{であれば，} j \in S_2.$$

閉包の例を図1に示す．

次に，閉包(S_1, S_2)の重みを次式で定義する．

$$w(S_1, S_2) = \sum_{i \in S_1} w_{1i} + \sum_{j \in S_2} w_{2j}.$$

このとき，重みを最大にする閉包を最大重み閉包という．

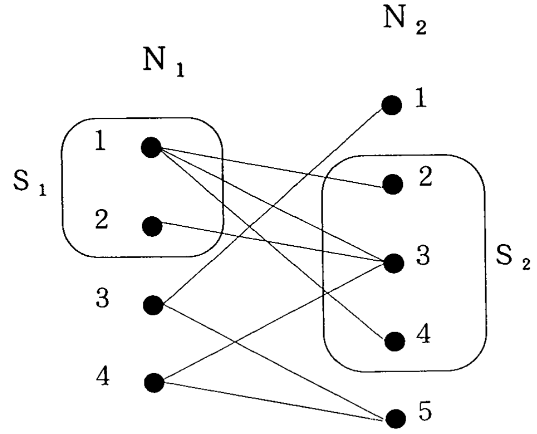

図1 閉包の例

3．最大重み閉包問題と最大流問題の関係

最大重み閉包を求める問題は，次に示す0-1変数問題P_0で表わすことができる．

$$
\begin{array}{lll}
P_0:\text{条件} & u_{1i}=1 \text{である} i \in N_1 \text{に対して，} & \\
& (i, j) \in B \text{であれば，} u_{2j}=1, & \\
& u_{1i}=0,\ 1 & (i \in N_1) \\
& u_{2j}=0,\ 1 & (j \in N_2)
\end{array}
$$

のもとで，

$$f_0 = \sum_i w_{1i}u_{1i} + \sum_j w_{2j}u_{2j}$$

を最大にせよ．

P_0の最適解に対して，

$$S_1 = \{\, i \mid u_{1i} = 1 \,\},\quad S_2 = \{\, j \mid u_{2j} = 1 \,\}$$

とおけば，(S_1, S_2)が最大重み閉包である．

P_0の最適解は，w_{1i}が正であることとw_{2j}が非正であることより，次のP_1を解くことによって得られる．

$$
\begin{array}{lll}
P_1:\text{条件} & u_{1i} \leqq u_{2j} & ((i, j) \in B), \\
& u_{1i} \leqq 1 & (i \in N_1) \\
& u_{2j} \geqq 0 & (j \in N_2)
\end{array}
$$

のもとで，

$$f_1 = \sum_i w_{1i}u_{1i} + \sum_j w_{2j}u_{2j}$$

こばやし たかし 法政大学
さとう まこと 日本電気ソフトウエア株式会社
みつもり まさのぶ 住商情報システム株式会社

を最大にせよ．

P_1 の双対問題 D_1 は，次のようになる．

$$D_1:\text{条件}\quad \begin{aligned} &\sum_j x_{ij}+y_i=w_{1i} && (i\in N_1),\\ &-\sum_i x_{ij}\geqq w_{2j} && (j\in N_2),\\ &x_{ij}\geqq 0 && ((i,j)\in B),\\ &y_i\geqq 0 && (i\in N_1) \end{aligned}$$

のもとで，

$$g_1=\sum_i y_i$$

を最小にせよ．

さらに，(y_i) を消去すると，D_1 は，次の D_2 になる．

$$D_2:\text{条件}\quad \begin{aligned} &\sum_j x_{ij}\leqq w_{1i} && (i\in N_1),\\ &\sum_i x_{ij}\leqq -w_{2j} && (j\in N_2),\\ &x_{ij}\geqq 0 && ((i,j)\in B), \end{aligned}$$

のもとで，

$$g_2=\sum_{(i,j)\in B} x_{ij}$$

を最大にせよ．

これは，二部グラフにおける最大流問題である．

最大流を求めるには，一般のネットワークに対するときのように，N_1 の点から N_2 の点への流量を増やせる路－増量可能路を探し，存在すれば，そこに流すことを繰り返せばよい．

この際，次のようにラベルを付けていけばよい．

(1) $\sum_i x_{ij}<w_{ij}$ である点 $i\in N_1$ にラベルを付ける．

(2) 点 $i\in N_1$ にラベルが付いていて，$(i,j)\in B$ であれば，点 $j\in N_2$ にラベルを付ける．

(3) 点 $j\in N_2$ にラベルが付いていて，$(i,j)\in B$，$x_{ij}>0$ であれば，点 $i\in N_1$ にラベルを付ける．

$\sum_i x_{ij}<-w_{2j}$ である点 $j\in N_2$ にラベルが付けば，増量可能路が存在する．

そのような点にラベルが付かなければ，最大流に到達している．そのときに，ラベルが付いている点の集合が，最大重み閉包である．

4．応用問題

二部グラフにおける最大重み閉包問題に変形できる組合せ問題を二つ紹介する．

(1) 修理員の携帯道具組合せ問題

修理員が携帯できる道具の集合を M，それらの一部を使ってできる修理（の内容）の集合を H とする．修理 i $(i\in \mathrm{H})$ を行うのに必要な道具の集合を $M_i\subset M$ とし，修理 i を（道具が足りなくて）できなかったときの損失を c_{1i}，道具 j $(j\in M)$ の携帯費用を c_{2j} とする．修理員が携帯する道具の組合せ（集合）を $T\subset M$ とすると，これに対する損失と費用の和は，

$$\sum_{i,M_i\not\subset T} c_{1i}+\sum_{j\in T} c_{2j}$$

となる．そこで，これを最小にする T，すなわち，

$$\sum_{i:M_i\subset T} c_{1i}-\sum_{j\in T} c_{2j}$$

を最大にする T を求めることにする．

これは，次のように点の集合などを定めれば，二部グラフにおける最大重み閉包問題になる．

$$\begin{aligned} &N_1=H,\\ &N_2=M,\\ &B=\{(i,j)\mid j\in M_i\},\\ &w_{1i}=c_{1i} && (i\in N_1),\\ &w_{2j}=-c_{2j} && (j\in N_2). \end{aligned}$$

(2) 貨物輸送のターミナル設置問題

貨物輸送のターミナルの候補地点の集合を M，地点 j $(j\in M)$ にターミナルを設置するときの費用を c_i，2地点 j，k 間 $(j<k)$ の輸送を行うときの利益を a_{jk} とする．ここで，ターミナルを設置する地点の集合を T とし，

$$R(T)=\{(j,k)\mid j,k\in T,\ j<k,\ a_{jk}>0\}$$

とおいて，利益と設置費用の差

$$\sum_{(j,k)\in R(T)} a_{jk}-\sum_{j\in T} c_j$$

を最大にする T を求めることにする．

これは，次のように点の集合などを定めれば，二部グラフにおける最大重み閉包問題になる．

$$\begin{aligned} &N_1=\{(j,k)\mid j<k,\ a_{jk}>0\},\\ &N_2=M,\\ &B=\{(i,j)\mid i=(j,\cdot)\text{または}i=(\cdot,j)\},\\ &w_{1i}=a_{jk} && (i\in N_1,\ i=(j,k)),\\ &w_{2j}=-c_j && (i\in N_2). \end{aligned}$$

5．おわりに

前述の応用問題の他にも，多くのものを組み合わせると，利用価値が大きくなるが，費用もかさむ場合に，最適な組合せを求める問題は，いろいろ存在すると思われる．それぞれに合わせて，二部グラフに変換するプログラムを作成しておけば，利用しやすくなる．

参考文献

[1] R. V. Ahuja et al., Network Flows-Theory, Algorithms and Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[2] 古林　隆，線形計画法入門，産業図書，1980.