鉱山の在庫問題とダム問題

今井　忠男

1．はじめに

1．1　目　的

鉱山の経営は、鉱石を、一方では地球という未知の対象を相手に生産し、片方では世界市場という不測なシステムの中で販売しなければなりません。このため、すべてを人為的に制御することは不可能で、経営するには大変難しいシステムといえます。しかし、このような鉱山経営にあっても、他の経済現象と類似する部分も多くあり、ここでは、鉱山での在庫問題を取り上げて検討します。とくに、このメモでは、鉱山の在庫問題は、見方を変えると本質的にはダムの問題と類似していることを指摘し、このメカニズムの一端をＯＲ的に調べて見ました。また、この在庫問題から、貯鉱場の最適規模の算定も試みました。まだまだ検討中の問題ですので、読者の皆様からご意見をいただければ幸いです。

1．2　鉱山の在庫問題とダム問題

今回提案する鉱山の在庫問題の特徴は、他の生産業の問題に比較し、鉱山では生産量が簡単に調節できない点にあります。その原因は、採掘現場は力学構造が弱く、採掘を急に止めると危険となることと、増産には新たな採掘現場を設定する必要があり、この作業は短期間では困難なためです。このような鉱山の在庫問題を簡単にモデル化すると、需要変動に対して生産量が一定のシステムといえます。これに対し、ダム問題では、ほぼ一定量の消費水量に対し、天候の影響によって河川からの供給水量が変動します。ダムの場合、消費水量を調整することは極めて困難です。両者のモデルは、出口と入口の関係が反転していますが、本質的なメカニズムは同じといえます。ダムの問題では、HURST,H.E.[1]を初め多くの研究がありますが、著者はこの問題を鉱山の在庫問題として解いて見ました。

いまい ただお　秋田大学 鉱山学部
〒010 秋田市 手形学園長町1-1
e-mail : imai@ipc.akita-u.ac.jp

2．ランダムウォークによる貯鉱のモデル化

2．1　貯鉱量変動モデル

鉱山では、売買契約の期間を需要変動の最小単位と仮定します。いま、この期間ΔTを一定とし、ある年をi、この年の需要の変動をjとして、i年にj回需要が変動したときの貯鉱重量を$m_{i,j}$とすると、$m_{i,j}$は以下の離散式で表わすことができます。

$$m_{i,j} = m_{i,j-1} + D_{i,j} \qquad \left\{0 \le m_{i,j} \le m_{\max}\right\} \tag{1}$$

$$D_{i,j} = P_i - S_{i,j} \qquad \begin{cases} i = 1,2,3,\cdots \\ j = 1,2,\cdots,L \end{cases} \tag{2}$$

ここで、$D_{i,j}$は貯鉱変動量、P_i、$S_{i,j}$は、それぞれΔTあたりの生産量および需要量です。このモデルでは、需要は毎回変化するのに対し、P_iは１年毎に調整するシステムとしました。ここで、i年の生産量P_iは、前年の需要平均にすると仮定します。

$$P_i = \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L} S_{i-1,j} \tag{3}$$

ただし、Lは年間の需要変動回数です。

2．2　単純ランダムウォークモデル

はじめに、需要変動期間を１年とし、前年度実績で生産計画を行う単純なモデルを検討します。この場合、需要量S_iは前年度の需要に対して大きく変化しないと仮定すると、$|D_i|$は生産量P_iに比較して十分小さくなりますから、離散的には、ほぼ一定値ΔD_mに丸めることができます。

$$|D_i| = \pm \Delta D_m \tag{4}$$

また、需要変動は揺らいでいることから、ΔD_mの符号は$1/2$の確率で変化するとします。

この確率モデルは、粒子が線分上を確率$1/2$でランダムウォークし、両端に吸収壁を持つ問題と一致します[2]。いま、吸収壁を貯鉱量が０および満杯$m_{\max}$の場合とし、貯鉱量の状態をnとすると、吸収壁に吸収されるまでの平均回数$E(N_n)$は以下の式となります。

$$E(N_n) = 1 + \frac{1}{2}E(N_{n+1}) + \frac{1}{2}E(N_{n-1}) \tag{5}$$

これを解くと次式が得られます。

$$E(N_c)=\frac{1}{4}\left(\frac{m_{\max}}{\Delta D_m}\right)^2 \tag{6}$$

ただし、$n=m_{\max}/2=c$とします。また、貯鉱量が0および$m_{\max}$になるまでの期間Tは次のようになります。

$$T=E(N_c)\cdot\Delta T$$

$$T=\frac{1}{4}\left(\frac{m_{\max}}{\Delta D_m}\right)^2\cdot\Delta T \tag{7}$$

ただし、ここでは$\Delta T=1$です。次節では$\Delta T<1$の任意の場合について検討します。

2．3　ポアソン分布を用いたランダムウォークモデル

さて、ΔTを1年以下の期間とし、$|D_{i,j}|$が変化する場合を考えます。いま、離散ステップ間隔をΔD_mとし、$k=|D_{i,j}|/\Delta D_m$がおよそ次式のポアソン分布pで近似できると仮定します。

$$p(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad(k=0,1,2,\cdots) \tag{8}$$

$$\lambda=\frac{D_{Ave}}{\Delta D_m}$$

ここで、D_{Ave}は$|D_{i,j}|$の平均値です。この分布を用いて$E(N_n)$の一般式を書き下すと次のようになります。

$$E(N_n)=1+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}p(k)\{E(N_{n-k})+E(N_{n+k})\} \tag{9}$$

上式を解析的に解くことは困難なので、以下のような方法によって解を求めることにします。

視点を変えてみると、この問題は、貯鉱量の変化が最終的に0および$m_{\max}$となる吸収的マルコフ過程であることがわかります。つまり、ここでは貯鉱量が$m_{i,j}$の状態から0および$m_{\max}$の最終状態になるまでの、平均遷移回数を求める問題と一致します。いま、貯鉱量の推移確率行列$\mathbf{P}$を次のよう定義します。

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{R} & \mathbf{Q}\end{pmatrix} \tag{10}$$

ここで、G_1を吸収壁に到達した状態、G_2をその他の状態にある場合とすると、$\mathbf{I},\mathbf{Q}$はそれぞれG_1,G_2の内部での推移確率行列であり、$\mathbf{R},\mathbf{0}$は$G_2\to G_1$および$G_1\to G_2$への推移確率行列となります。したがって、$\mathbf{I}$は単位行列、$\mathbf{0}$は0行列となります。これを用いると、G_2内のある状態iからG_1へ遷移する平均回数$E(N_i)$は、以下のように表わすことができます[3]。

$$\mathbf{V}=\{v_{i,j}\}$$

$$\mathbf{V}=(\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1} \tag{11}$$

$$E(N_i)=\sum_{i,j=1}^{i,j=M-1}v_{i,j} \tag{12}$$

ただし、$\mathbf{Q}$は以下に示す値となる。

$$\mathbf{Q}=\{q_{i,j}\}\qquad(i,j=1,2,3,\cdots,M-1)$$

$$\begin{cases} i=j\to q_{i,j}=p(0)\\ i\neq j\to q_{i,j}=\dfrac{1}{2}p(|j-i|)\end{cases} \tag{13}$$

ここで、$M=m_{\max}/\Delta D_m$です。また、$E(N_i)$が最大値をとるのは$c=M/2$のときとなり、求める最大遷移回数$E(N_c)$は次式となります。

$$E(N_c)=\sum_{j=1}^{M-1}v_{c,j} \tag{14}$$

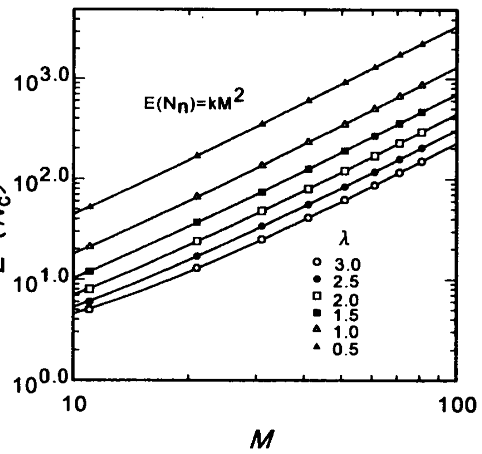

図1 最大貯鉱回数と貯鉱量を処理するまでの平均回数

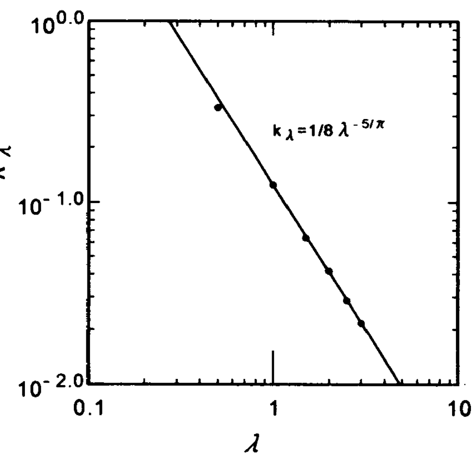

図2 平均変動量λと傾きk_λとの関係

図1に数値計算によって求めた$E(N_c)$とMとの関係を示します。この結果から次の近似式を得ました。

$$E(N_c)=k_\lambda M^2 \tag{15}$$

また、図2はk_λとλの関係を示したものです。この結果から以下の近似式を作成しました。

$$k_\lambda \cong \frac{1}{8}\lambda^{\frac{-5}{\pi}} \tag{16}$$

前節の結果は、このモデルの$k_\lambda = 1/4$のとき、すなわち$\lambda \cong 0.647$の場合と現象が類似すると予想できます。

以上の関係から、次のような近似式を求めました。

$$E(N_c) = \frac{1}{8}\lambda^{\frac{-5}{\pi}}\left(\frac{m_{\max}}{\Delta D_m}\right)^2 \tag{17}$$

$$T = \frac{1}{8}\lambda^{\frac{-5}{\pi}}\left(\frac{m_{\max}}{\Delta D_m}\right)^2 \Delta T \tag{18}$$

次に、平均値λは、期間ΔTに関係すると推測できるので以下の議論を試みます。ガウス過程の１次元ランダムウォークでは、その分散σ^2と時間長さtとが比例することが知られており、拡張した一般的なランダムウォークでは次のような関係となります[4]。

$$\sigma^2 = bt^{2H} \tag{19}$$

ただし、bは比例定数、Hはハースト数です。ここで、貯鉱量$m_{i,j}$は一般的なランダムウォークであるので、貯鉱量とその分散の関係も上式と同様とします。ポアソン分布では平均値と分散が一致し、時間長さは年間の需要変動回数Lに置き換えられるので次式を得ます。

$$L = \frac{1}{\Delta T}$$

$$\lambda = b\Delta T^{-2H} \tag{20}$$

よって式（18）は次のようになります。

$$T = B\Delta T^{\frac{10H+\pi}{\pi}}\left(\frac{m_{\max}}{\Delta D_m}\right)^2 \tag{21}$$

$$B = \frac{1}{8}b^{\frac{-5}{\pi}}$$

式（8）と式（20）から、ΔD_mは平均値D_{Ave}によって次式で算定することができます。

$$\Delta D_m = \frac{D_{Ave}\Delta T^{2H}}{b} \tag{22}$$

次章では、これらの結果を用いて最適な貯鉱場設計を試みます。

３．最適な貯鉱場の設計

３．１　貯鉱場のコストモデル

貯鉱場を建設･管理･運営するためには、最大貯鉱量を管理できるシステムが必要ですので、このコストは最大貯鉱量によって決まります。一般的に、設備費や土地代などは減価償却費として毎年支払われ、管理費も毎年一定額が必要です。実際には、土地代は、貯鉱体積を円錐形に仮定すれば、貯鉱体積のほぼ2/3乗に比例しますが、全体の費用に対して影響は小さいとし、貯鉱場コストC_Aは最大貯鉱量に比例して増加すると仮定します。

$$C_A = c_d \cdot V_{\max} \cdot T_{\max} \tag{23}$$

ここで、$V_{\max}$は最大貯鉱量体積、$T_{\max}$は予定操業期間、c_dは単位体積鉱量あたり年間に必要なコストです。ただし、前章では販売の問題を扱ったので鉱量は重量（＝質量）でしたが、ここでは鉱量を管理・運搬する問題なので鉱量は体積としました。

次に貯鉱場の管理方式をモデル化します。本テーマでは、在庫量を考慮した生産計画が極めて困難な場合を仮定していますので、生産量を調整すること以外の方法で在庫量を調整する必要があります。実際には、いろいろな調整方法が考えられますが、原理的には、オバーフローした鉱石は廃棄し、在庫が０となれば販売を中止することになると考えられます。ここでは、この原理のままに、以下の管理システムとしました。

(1)　０となったら$1/2V_{\max}$となるまで販売を中止する。

(2)　満杯になったら鉱石を廃棄して$1/2V_{\max}$とする。

ただし、初期の在庫量は$1/2V_{\max}$とします。このとき、1/2の確率でどちらかの状態になるのですから、鉱石の処理コストC_Bは次式となります。

$$C_B = c_r \cdot 1/2V_{\max} \cdot T_{\max}/T \tag{24}$$

ここで、c_rは単位体積鉱量あたりの採掘と廃棄コストの単純平均値です。簡単には、c_rは鉱石単価に等しいと仮定できますので、鉱石の価値によって決まる値といえます。以上から、総貯鉱コストC_{sum}を求めますと次式となります。

$$C_{sum} = C_A + C_B$$

$$C_{sum} = V_{\max} \cdot T_{\max}\left(c_d + c_r\frac{1}{2T}\right) \tag{25}$$

いま、式（21）ではTは重量に関する式となっていますので、重量$m_{\max}, \Delta D_m$をそれぞれ体積$V_{\max}, \Delta D_V$に変換すると次式になります。

$$T = B\Delta T^{\frac{10H+\pi}{\pi}}\left(\frac{V_{\max}}{\Delta D_V}\right)^2 \tag{26}$$

ただし、ΔD_mとΔD_Vとの関係は次式となる。

$$\Delta D_V = \frac{\Delta D_m}{\rho(1-\phi)} \tag{27}$$

ここで、ρは真密度、ϕは貯鉱堆積層の空隙率です。また、上式を式（25）に代入して以下を得ます。

$$C_{sum} = V_{\max} \cdot T_{\max}\left(c_d + c_r\frac{\Delta D_V{}^2}{2B\Delta T^{\frac{10H+\pi}{\pi}} V_{\max}{}^2}\right) \tag{28}$$

上式から、コストが最少$(C'=0)$となる最適な貯鉱最

大量V_{opt}を求めます。

$$V_{opt}=\sqrt{\frac{\gamma}{2B}\Delta D_V}\Delta T^{\frac{-(10H+\pi)}{2\pi}} \tag{29}$$

ただし、$\gamma=c_r/c_d$です。次に、上式を式（26）に代入すると、最適な貯鉱場が0または満杯となるまでの期間T_{opt}が以下のように求まります。

$$T_{opt}=\frac{\gamma}{2} \tag{30}$$

上式より、最適な期間T_{opt}は期間ΔTに関わらずコスト比γだけによって決定されることになります。また、貯鉱を円錐上に堆積させると仮定するとV_{opt}に対応した最適な貯鉱場面積A_{opt}を算定することができます。

$$V=\frac{1}{3}\tan\theta\sqrt{\frac{A^3}{\pi}} \tag{31}$$

ここで、θは鉱石の安息角です。上式および式（27）を式（28）に代入して整理すると次式が求まります。

$$A_{opt}=\left\{\frac{9\pi\gamma\, D_{Ave}{}^2}{2B\tan^2\theta\cdot b^2\rho^2(1-\phi)^2}\right\}^{\frac{1}{3}}\Delta T^{\frac{(4\pi-10)H-\pi}{3\pi}} \tag{32}$$

以上のモデルによって、最適な貯鉱場の設計をおこなうことが可能とななります。

3．2　最適な貯鉱場モデルの検討

以下では、具体的な数値を代入してモデルの検証をおこないます。いま、ポアソン過程も、ほぼガウス過程と同様に$H=0.5$と仮定します。また、$\Delta T=1$のとき$\lambda=0.647$と仮定すると、$b=\lambda$となり、Bは次値となります。

$$B=\frac{1}{8}0.647^{\frac{-5}{\pi}}\cong 0.25$$

さて、鉱石の平均密度$\rho=2.7(\mathrm{t/m^3})$、空隙率$\phi=0.5$、安息角$\phi=10^\circ$として、以上のパラメータを式（32）に代入し次式を得ました。

$$A_{opt}=13.4\Delta T^{-0.197}\left(\gamma\cdot D_{Ave}{}^2\right)^{\frac{1}{3}} \tag{33}$$

$$\frac{A_{opt}}{A_{DA}}=1.38\Delta T^{-0.197}\gamma^{\frac{1}{3}} \tag{34}$$

ここで、A_{DA}はD_{Ave}の貯鉱面積です。

いま、$\Delta T=3/12$で、$D_{Ave}=10^5(\mathrm{ton})$の場合を検討します。このとき、$A_{DA}=1.7(\mathrm{ha})$、生産量は$D_{Ave}$の10倍と仮定してその面積を$A_S=7.9(\mathrm{ha})$とします。以上の仮定値より、$\gamma=\{5,50\}$について以下の値を求めました。

$$\begin{cases}\gamma=5\\ A_{opt}/A_{DA}=3.10\\ A_5=5.3(\mathrm{ha})\\ A_5/A_S=0.67\\ T_5=2.5(\mathrm{year})\end{cases}\qquad\begin{cases}\gamma=50\\ A_{opt}/A_{DA}=6.67\\ A_{50}=11.3(\mathrm{ha})\\ A_{50}/A_S=1.45\\ T_{50}=25(\mathrm{year})\end{cases}$$

上記の結果から、$\gamma=5$つまり管理コストが処理コストの20%である場合、貯鉱場面積は3ヶ月分の生産量の67%を貯鉱できる程度が最適であり、平均2.5年に1度貯鉱量を調整する必要があります。調整期間が短く感じられますが、貯鉱場をこれ以上大きくすると管理費の方が高く付くことになります。

また、$\gamma=50$では、管理コストが処理コストの2%であり、貯鉱場コストをあまり考慮せずに経営できる場合といえます。ここでは、$\gamma=5$のときの2倍以上の貯鉱面積を確保して悠々経営ができることになります。また、処理期間が25年ですので、ある程度、長期的見通しが可能です。したがって、長期的な計画による生産量や販売量の調整によって、販売停止や鉱石の廃棄をすることなしに管理できるといえます。

以上、鉱山の在庫問題は、金銀など価値の高い鉱床でかつ管理費の安い場合（γが大）は簡単であり、安い鉱石の鉱床で管理費の高い場合（γが小）では、大変困難であるという、実際の常識に見合った結果となりました。

4．おわりに

本モデルが実際の経済現象に対して、どの程度有効であるか検証することは難しいことですが、鉱山の経営メカニズムを知る一助としたいと思います。また、ダム問題も同様のアプローチが可能であると思いますので、興味ある方はご検討下されば幸いです。

引用文献

[1] HURST,H.E., BLACK,R.P., SIMAIKA,Y.M: Long Time Storage:An Experimental Study., Constable London., (1965)

[2] ブロム,G., ホルスト,L., サンデル,D.: 確率問題ゼミ，シュプリンガー・フェアラーク東京㈱, (1995)

[3] KEMENY,J.D.,SNELL,J.L: Finite Marcov Chains., Van Nostrand, (1960)

[4] マンデルブロ,B.: フラクタル幾何学，日経サイエンス㈱, (1985)