解　説

平均値の意味と構造 I

柳井　浩

1　はじめに

“平均値” (算術平均) という指標を我々は，日常，無造作に使っている．しかしそれは，曖昧ながら，データをまとめた，一つの代表値としての意味を意識してのことであろう．評価の基準や順序づけの手段，そして平等な分配などの目的に用いられることもある．ORでは目的関数として最適化の対象とされることも少なくない．

それならば，平均値とは一体どういうものなのか？従来，“平均” と呼ばれているものには，算術平均の他，幾何 (相乗) 平均や調和平均もある．何ゆえにそのうちの一つを選ぶのか？もっと視野を広げて考えるなら，いかなる条件を満たす算法を “一般的な意味での平均” と見なし得るのか？またその中から，従来の平均とは異なる，“新しい” 平均法を設計することは出来ないのか？本稿では，こんなことを少しく考察してみたい．[1]

本稿では，話をわかりやすく，論点をはっきりとさせるために，データが同じ尺度で計測できる2つの値 x, y で，いずれも非負とし，これらから “平均値” として計算される値を z としよう．

まず手始めに，従来から使われている算術一，幾何一，調和一の三つの平均について，算法を示しておこう．

例1.1　算術一，幾何一，調和平均　これらの平均値を与える数式は，周知のごとく次の通りである．

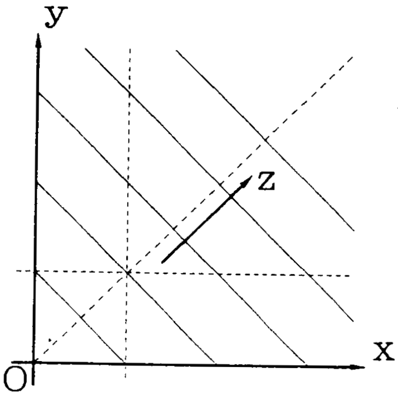
$$\text{算術平均}\quad 2z = x + y \tag{1}$$

$$\text{幾何平均}\quad z^2 = xy \tag{2}$$

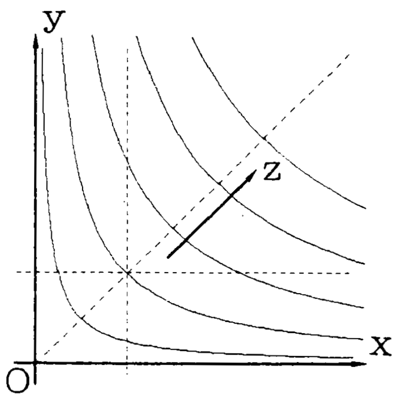
$$\text{調和平均}\quad \frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{3}$$

次に，$X-Y$ 平面上に同じ平均値を与える点の集合を画いて見よう．これを等平均値線と呼ぶ．x, y の平均値 z は，いずれにせよ，

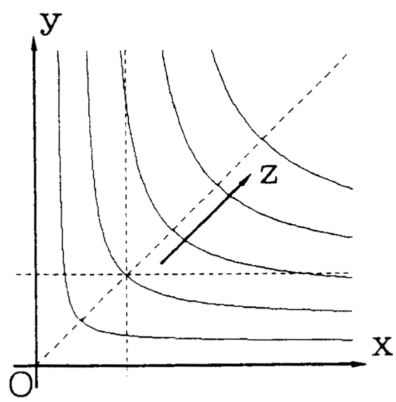
$$z = \phi(x, y) \tag{4}$$



a　算術平均



b　幾何平均



c　調和平均

図　1　等平均値線

やない　ひろし　慶應義塾大学理工学部管理工学科
〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

という形に書けるから，等平均値線は関数$\phi(x,y)$の等高線ということになる．

まず，算術平均

$$z=\frac{1}{2}(x+y) \tag{5}$$

の等平均値線は$X-Y$平面上 $-45°$ の勾配を持つ直線群である．(図1a)

次に，幾何平均

$$z=\sqrt{xy} \tag{6}$$

の等平均値線は，上の式から直ちに

$$y=\frac{z^2}{x} \tag{7}$$

という式が導かれることからもわかるように，双曲線群である．(図1b)

また，調和平均については，(3)式をyについて解けば

$$y=\frac{xz}{2x-z} \tag{8}$$

となり．図を見た所（図1c）では，45° 線のあたりで鋭く湾曲し，幾何平均の場合とはかなり印象の違う曲線群である． □

2 平均値の一般的定義

以上，3種類の平均法について等平均値曲線を見た所で，これらに共通な性質をふまえて一般化し，広い意味における平均値の定義を試みよう．

定 義 連続関数

$$z=\phi(x,y) \tag{9}$$

が次の3つの条件を満足するとき，これを**平均値関数**，その値を**平均値**という．また，その等高線を**等平均値線**とよぶ．

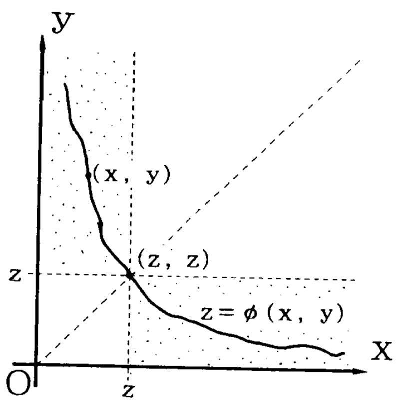


図 2 等平均値線と平均の操作

1) すべての$x,y\geq 0$について，

$$\min(x,y)\leq\phi(x,y)\leq\max(x,y) \tag{10}$$

2) 関数$\phi(x,y)$はx,yのそれぞれについて非減少関数であり，停留点がない．

$\phi(x,y)$が微分可能な場合には，この条件は次のように書くことができる．

$$grad\ \phi\geq \mathrm{o},\ div\ \phi>\mathrm{o} \tag{11}$$

3) 関数$\phi(x,y)$は一次の同次関数である．すなわち，すべての$\alpha\geq 0$について

$$\phi(\alpha x,\alpha y)=\alpha\phi(x,y) \tag{12}$$

が成立する． □

条件1)は，平均値というものがデータの代表であるべきだとする考えを反映している．そして幾何学的に見れば，$\phi(x,y)$の等高線，すなわち等平均値線が2つの帯状領域の合併集合（図2参照）

$$\{0\leq x\leq z,\ z\leq y\}\bigcup\{z\leq x,\ 0\leq y\leq z\} \tag{13}$$

の中にあることが導かれる．従ってこの条件は

$$z=\phi(z,z) \tag{14}$$

の成立を求めている．いいかえれば，平均という操作はデータを等平均値線に沿って動かし，この曲線と 45° 線の交点のそれに置き換えることになる．

また条件2)は，平均値が指標であり，データの動きに対してゼロでない“感度”をもつことを要請している．

一方，条件3)は平均値が，尺度の変換とともに変換されることを要求している．たとえば，'時間'を単位として計算した平均も，'秒'を単位として計算したものも，単位を変換すれば，相等しいという意味である．そこで，条件3)から，

$$\phi(u,v)=1 \tag{15}$$

という等平均値線が与えられさえすれば，関数$\phi(x,y)$全体が定まってしまうことも明らかだろう．

例2.1 前節で述べた，**算術**，**幾何**，**調和**の3つの平均法が，この定義をみたしていることは明らかであろう． □

例2.2 **重みづけ算術平均**

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y\quad \lambda\in[0,1] \tag{16}$$

もここでいう平均値の条件を満たしている． □

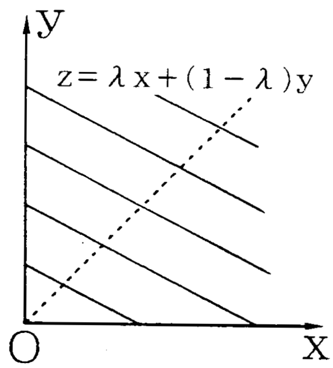


図 3　重みづけ平均の等平均値線

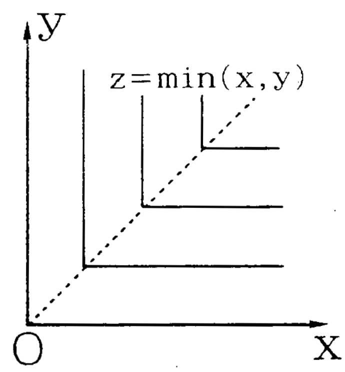
また，この定義に従えば，次の2例に示すものも平均値の仲間に入ってしまう．勿論，これらが日常語としての“平均値”と認められるか否かは問題にはなる所ではあるが，本稿ではとりあえずこの定義に従って話を進めよう．

例2.3　最小値や最大値

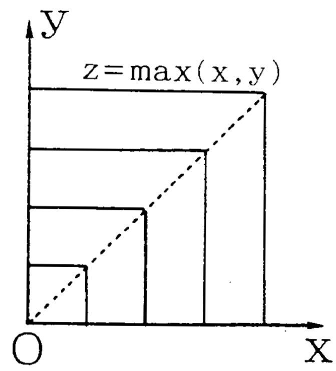
$$z = \min(x, y) \qquad (17)$$

$$z = \max(x, y) \qquad (18)$$

もこの定義による平均値である．(図4参照)　□



a　最小値



b　最大値

図 4　最小値，最大値

例2.4　本稿では，3個以上のデータを考えていないが，定義の拡張の方法は明らかであろう．それによれば，**中央値**や，データのうちの，**最大値および最小値を除いた算術平均**も，上の定義の意味での平均値になることが明らかであろう．　□

平均値関数の合成　さらに，このような定義に従ういくつかの“平均値“を組み合わせて，別の“平均値”を合成することも出来る．2つの方法を紹介しておこう．

合成法 1　関数$\phi_1(x,y)$および$\phi_2(x,y)$が平均値関数であるとき，

$$\phi_3(x,y) = \min(\phi_1(x,y), \gamma\phi_2(x,y)) \quad \gamma > 1 \qquad (19)$$

によって定義される関数$\phi_3(x,y)$もまた平均値関数の条件を満たしている．(証明略,[2] 参照)　□

例2.5

$$\phi_1(x,y) = \frac{1}{2}(x+y) \qquad (20)$$

$$\phi_2(x,y) = \min(x,y) \qquad (21)$$

すなわち

$$\phi_3(x,y) = \min(\frac{1}{2}(x+y), \gamma\min(x,y)) \quad \gamma > 1 \qquad (22)$$

とすれば，図5のような等平均値線をもつ平均法が得られる．この平均法は，たとえば，2科目の成績によって合否を判定するのに，最低点が一定値を超えることを条件に，算術平均を用いる方法である．(図5参照)　□

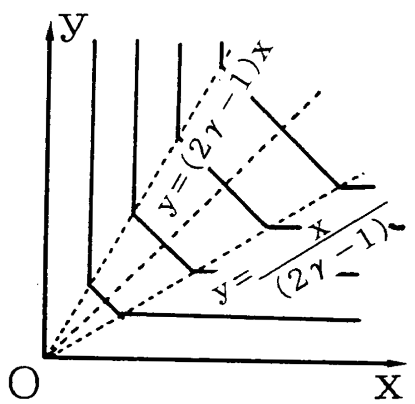


図 5　例2.5の等平均値線

例2.6

$$\phi_1(x,y) = \max(x,y) \qquad (23)$$

$$\phi_2(x,y) = \min(x,y) \qquad (24)$$

すなわち，

$$\phi_3(x,y)=\min(\max(x,y),\gamma\min(x,y))\ \ \gamma>1 \quad (25)$$

とすれば，図6のような等平均値線をもつ平均法が得られる．この平均法は，たとえば，2科目の成績を総合評価するのに，最低点が一定値をこえるのを条件に，最も得意な科目で評価しようという場合に用いられる方法である．(図6参照)　□

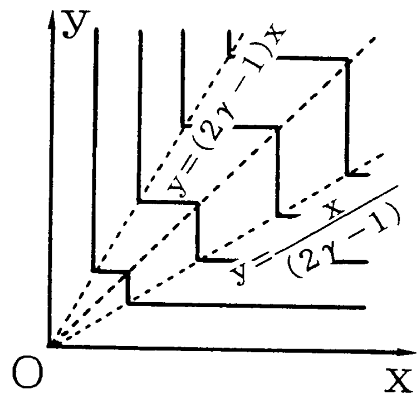


図　6　例2.6の等平均値線

合成法　2　関数$\phi_1(x,y)$，$\phi_2(x,y)$および$\phi_3(x,y)$が平均値関数であるとき，

$$\phi_4(x,y)=\phi_3(x,y)(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y)) \quad (26)$$

によって定義される関数$\phi_4(x,y)$もまた平均値関数の条件を満たしている．(証明略,[2]参照)　□

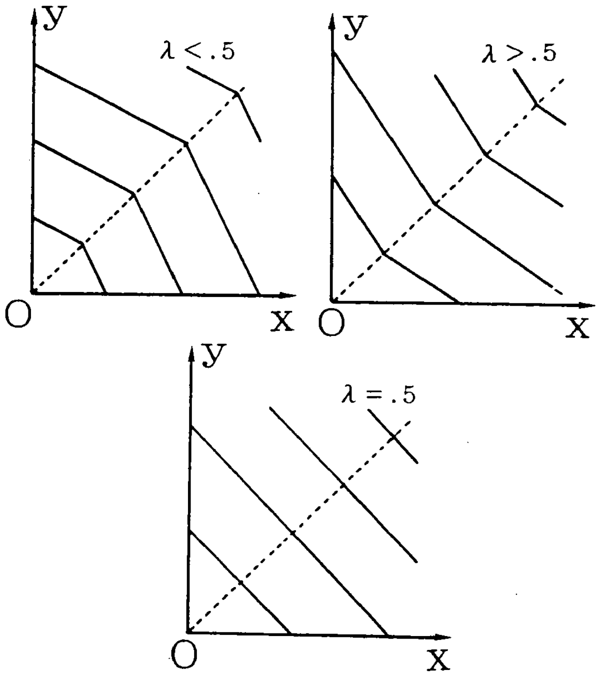


図　7　例2.7の等平均値線

例2.7

$$\phi_1(x,y) = \max(x,y) \quad (27)$$

$$\phi_2(x,y) = \min(x,y) \quad (28)$$

$$\phi_3(x,y) = \lambda x+(1-\lambda)y\ \ \lambda\in[0,1] \quad (29)$$

すなわち，

$$\phi_4(x,y)=\lambda\min(x,y)+(1-\lambda)\max(x,y)\ \ \lambda\in[0,1] \quad (30)$$

とすれば，図7のような等平均値線をもつ平均法が得られる．この方法は，$\min(x,y)$と$\max(x,y)$の凸結合であるから，λが小さいときにはmaxがよく効き，λが大きいときにはminがよく効く．たとえば，2科目の成績の総合の場合でいえば，λを小さくとれば個性尊重，λを大きくとれば品質保証が強調されることになる．(図7参照)　□

3　平均値の物理的解釈

次に，本節では視点を変え，平均値が持つ“物理的”な意味を考えてみることにしよう．もっともこれらは“解釈”であり，解釈というものは，一般に，一意的なものではないから，ここに示すのも，それぞれ，“解釈の例”である．

例3.1　算術平均 ――1次のモーメント　図8のような桿秤を考えよう．支点の右側，支点からそれぞれxおよびy離れた所に1kgの錘をさげ，これを支点の反対側に吊した錘Mでバランスさせよう．つぎに，右側にある2つの錘を同じ位置に移し，なおかつ左側の錘を一切変化させないままバランスさせるような位置zを求めよう．桿秤は支点Oをまわる1次のモーメント

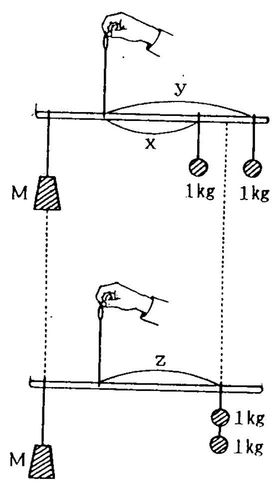


図　8　算術平均と1次のモーメント

によってバランスしている．上図の右側の2つの錘によるモーメントは

$$x \cdot 1kg + y \cdot 1kg \tag{31}$$

であり，下図の場合には

$$z \cdot 2kg \tag{32}$$

となる．どちらも，同じ位置にある同じ錘とバランスするのだから，

$$2z = x + y \tag{33}$$

すなわち，

$$z = \frac{1}{2}(x+y) \tag{34}$$

という算術平均に相当する距離が得られる．つまり，算術平均とはいろいろな距離に散在する錘を一個所に集めても，同じ1次のモーメントをもたらす距離と解釈できる． □

例3.2　幾何平均――面積　辺の長さがxおよびyの長方形を考える．これと面積の等しい正方形の一辺の長さzは，いうまでもなく幾何平均

$$z = \sqrt{xy} \tag{35}$$

である．すなわち，幾何平均は長方形と同じ面積の正方形の一辺の長さと解釈できる．(図9参照) □

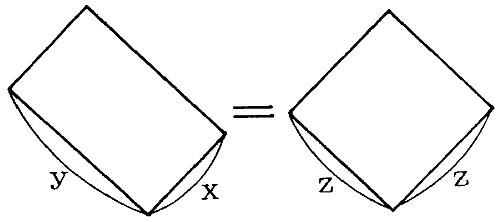


図　9　幾何平均と面積

例3.3　調和平均――所要時間　速度がxの自転車で$1km$進み，さらにそこから，速度がyの電車で$1km$進んだ．この$2km$の道を一様な速度の自動車で，同じ時間で行くには，速度を何程に保てばよいか？

図10のようにヨコ軸を時間，タテ軸に移動距離をとろう．いま，出発点であるOから，時速xで移動すれば，その運動は点Oを通る勾配がxの直線に沿った点の移動に対応する．そして，この直線上，タテ座標の値が1になる点Aのヨコ座標の値が，はじめの$1km$を行くのに要する時間である．次の$1km$についても同様である．そこからの移動は点Aを通る，勾配がyの直線に対応する．この直線上，タテ座標の値が2になる点Bのヨコ座標の値が2になる点Bのヨコ座標の値が$2km$の行程全体の所要時間である．式で書けば，

$$T = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{36}$$

となる．

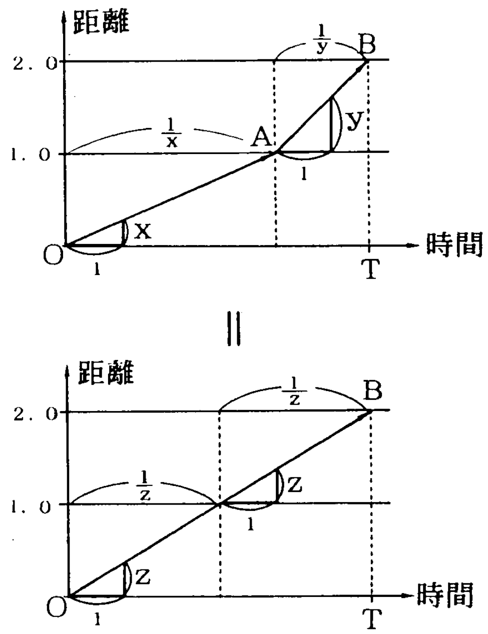


図　10　調和平均と所要時間

一方，一様な速度で，同じ距離を同じ時間で行くのならば，その移動は原点OとBを結ぶ直線に，その勾配はそのときの速度に対応する．所要時間は同じ値Tであるが，速度zとは

$$T = \frac{2}{z} \tag{37}$$

という関係にある．すなわち，

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{38}$$

したがって，速度zは速度xおよびyの調和平均になる．つまり，調和平均は，異なる速度で行くのと同じ所要時間をもたらす一様な速度と解釈することが出来る．

調和平均は他の2つの平均法に較べて日常なじみの薄いものではあるが，この他，数多くの物理的解釈が可能である．というのも，物理現象のなかには，逆数の和が一定の値になる，いわゆる**相反法則**の成立が多く見られるからである．レンズの結像点の公式，直列につないだコンデンサーの容量，並列につないだ電気

抵抗の抵抗値，くっついた2つのシャボン玉等々である．この一定の値をある一つの値の逆数の和とみれば，その値が調和平均になるからである．(図11)　□

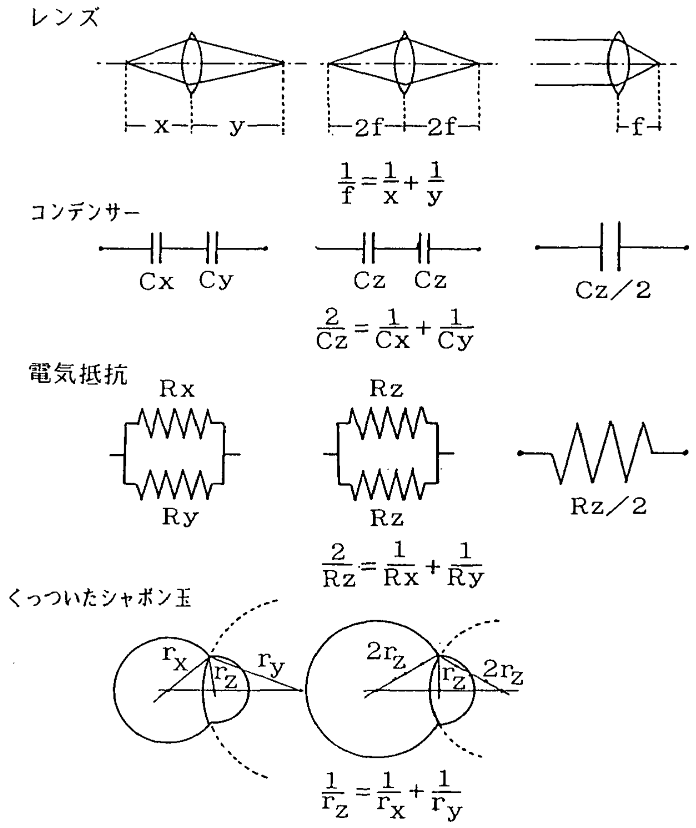


図　11　相反法則が成立する物理現象

参考文献

[1] 田中　庸平「たかが平均というなかれ」
日本オペレーションズ・リサーチ学会秋期研究発表会アブストラクト集，1993

[2] 柳井　浩「平均値の構造と設計」，*Technical Report No.95010, Dept. of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology, Keio Univ*, 1995.

会　合　記　録

1月11日（土）	機関誌編集委員会	12名
1月13日（月）	IAOR委員会	2名
1月16日（木）	40周年記念事業企画推進委員会	17名
	論文誌編集委員会	7名
1月17日（金）	庶務幹事会	6名
	研究普及委員会	9名
1月20日（月）	会計幹事会	2名
1月22日（水）	理事会	15名
1月31日（月）	表彰委員会	10名

第5回理事会議題　（9－1－22）

1．平成8年度第4回理事会議事録承認の件
2．名誉会員推薦の件
3．入退会承認の件
4．秋季支部長会議終了報告の件
5．第3・四半期収支報告の件
6．RAMPシンポジウム終了及び収支決算報告の件
7．第36回シンポジウム終了及び収支決算報告の件
8．平成8年度秋季研究発表会終了及び収支決算報告の件