教養講座

多様化時代の数理計画法　第6回

これからの展望

石井　博昭

1．はじめに

最近の多様化の時代にどう対処するかというのはまさしくオペレーションズ・リサーチの課題である．

多様化の要因としては不確実性と価値基準の多様化があるが，この2つは密接に関連している．ここでは2章でこれまでのまとめをし，3章でこれからの展開について述べて，そのなかで重要になってくるものとfuzzy random variableについて説明し，その後この特集の連載を締めくくる．

2．これまでのまとめ

山口氏の目標計画法，目標ベクトル法，多目的線形計画法，フレキシブル計画法は価値基準の多様化にどう対処するかに対する基礎的知恵を与えるものである．一方，乾口氏の可能性計画法，私の確率計画法は不確実性への対応の仕方を取り扱うものであるが，全体を通してやはり，鍵となるのは情報であることがわかるであろう．可能性計画はファジイの側面からのであり，確率計画法は確率現象としての捉え方であるが，乾口氏が見事に示しているように，確率計画法と可能性計画法は数学的な定式化では類似性がある．また，リグレット関数とリコースも類似性があることがわかる．リグレット関数は目標に対するもので制約に対するものがリコースである．従って，数理計画としてのモデルとしては同一に扱える．すなわち，すべてどのモデルも結局は非線形計画問題に帰着される．しかしながら，そこへの過程は異なっており，それが重要である．このことは現実への応用を視野に入れるともっと重要となる．さらに，決定的に違うのは意思決定に役立つように多様な解を用意するのが目的である点である．物事を多様な側面からみるのはオペレーションズ・リサーチの得意とするところ（であるべきところ？）であるので，本当はもっと進んで，多様化に対応して変化する，あるいはもっと適切に変化し得るような解を与えるモデルが必要であると思われる．

3．これからの展開

我々はたとえ確定的な事柄でもそれについて何ら情報がないとき，確率的に捉えて判断することが多い．また，人を選ぶ，特に，嫌な役回りをする人を決めるとき，例えば，あみだくじで選ぶなど確率的に決めることも多い．これは，多様な考えを持つ人がいるとき，最終的に確率的に決める＝公平に決めると一般に考えられているからでもある．次に天気予報を考えてみよう．一昔前はなかなかあたらなかったのであるが最近はかなり的中するようになってきた．データや情報が気象衛星などで瞬時に集められるようになってきたからである．サイコロの目にしても物理現象として考えれば，振る角度など膨大な情報とそれらを基に計算をすれば，出る目がわかるかもしれないように思われる．

何が確率現象か，あるいはファジイ現象なのかと考えてみることも必要になるように思われる．特に今回の阪神大震災は確率事象だから仕方がないとするのか，そうではなくもっと情報がすばやく手に入り，予測ができるのなら，あのような大規模な災害は防げたのではないかと思うかである．

一方，これまで確率現象の実現値は完全に知ることができるとしてきた．また，ファジイ現象では，曖昧性，漠然性は残るとしてきた．実現値が完全にわかってから意思決定していては遅い場合や実現値が不完全にしかわからない場合，さらには，我々の測定能力の限界などでどうしても曖昧性が残る場合があると思われる．そのような場合，実現値がファジイ数である確率現象を考えることの意味が出てくる．このような例としては在庫管理での品切れ費用等を考えることができる．単位当たりの品切れ費用は厳密には曖昧でファジイ数と考えることができる一方で需要の方は確率的

いしい　ひろあき
大阪大学大学院工学研究科 応用物理学専攻
〒565 吹田市山田丘2-1

であるとすることが多いので，品切れ量に単位品切れ費用を掛けた品切れ費用は，実現値がファジイな“確率変数”と考えることができる．このようなファジイ性とランダム性を合わせ持つ変数を fuzzy random variable という．正式な定義等は例えば文献 [6] などを見て頂くことにしてここでは省略する．

この fuzzy random variable の期待値はファジイ数となるので，在庫管理などでの総期待費用はファジイ数となり，製品を何個発注するかなどの最適方策はファジイ数の順序関係に基づいて決めなければならない．ファジイ数上の順序関係は半順序となることが多いので，最適解ではなく非劣解が存在することになり，山口氏の解説された目標計画とか多目的計画に再び関係する．また，その最適方策自身もこれまでのモデルの場合と異なってくる．このことを以下のファジイ品切れ費用をもつ新聞売り子の最適方策で説明する([3])．

新聞売り子問題は一番簡単な確率的在庫問題で以下のような設定となっている．

[新聞売り子問題]

毎朝新聞を売る少年がいる．新聞の仕入値は1部 b 円で売値は $a+b$ 円である．すなわち，新聞を1部売ると a 円の利益がある．新聞はその日のうちにしか売れないので，売れ残ると1部当たり仕入値の分 b 円だけ損をする．一方，お客が来ても新聞が品切れのときは c 円の“機会損失費用”が生じるとする．これが従来から曖昧で，議論のあるところである．新聞の毎日の需要 Y は確率的で，その実現値はその日が終わるまでわからないので. here and now すなわち，需要がわかる前に期待総利益を最大にするように毎日仕入れ量を決めなければならない．彼は幾ら仕入れたら良いであろうか． ■

(品切れ費用が確定値とする従来の場合の最適解)

彼が x だけ新聞を仕入れ，実際の需要が y であったとき彼の総利得 $e(x,y)$ は以下のようになる．

$$e(x,y)=\begin{cases} ay-b(x-y)\ (y\le x) \\ ax-c(y-x)\ (y\ge x) \end{cases}$$

需要 $Y=y$ である確率を $p(y)$ で表すと彼の総期待利得 $E(x)$ は

$$E(x)=\sum_{y=0}^{\infty}e(x,y)p(y)=\sum_{y=0}^{x}\{ay-b(x-y)\}p(y)$$
$$+\sum_{y=x+1}^{\infty}\{ax-c(y-x)\}p(y)$$

となる．$E(x)$ を最大にする最適仕入れ量 x^* は

$$\sum_{y=0}^{x^*-1}p(y)\le(a+c)/(a+b+c)\le\sum_{y=0}^{x^*}p(y)$$

を満たす非負整数として求められる．

(品切れ費用をファジイ数とするときの最適解)

単位品切れ費用 c を以下の帰属度関数 $\mu_{\tilde{c}}(x)$：

$$\mu_{\tilde{c}}(x)=\max(L(x-m),\ 0)$$

で与えられるL型ファジイ数 $\tilde{c}$ とする．L は型関数と呼ばれ，次の条件を満たすとする．

(1) すべての $x\in R$ について $L(-x)=L(x)$ が成り立つ．

(2) $L(x)=1 \Leftrightarrow x=0$

(3) $L(\cdot)$ は $[0,\infty)$ で単調非増加である．

(4) $x_0=\inf\{x>0|L(x)=0\}$ とすると $0<x_0<\infty$ である（x_0 は L の零点と呼ばれる）．

品切れ費用は当然正と考えられるので，一般性を失うことなく $m>0$，$x_0<m$ とする．このとき，利得関数の品切れ費用部分は仕入れ量が x であるとき，$\tilde{c}\times\max\{Y-x,0\}$ であるから，fuzzy random variable となる．ファジイ数と確率変数の積の形をしているのでこの形の fuzzy random variable を積型ハイブリッド数ということにする．もちろん，積型ハイブリッド数の期待値はファジイ数であるので，この場合の総期待利得は以下のファジイ数 $\tilde{E}(x)$ となる：

$$\tilde{E}(x)=\sum_{y=0}^{x}\{\{ay-b(x-y)\}p(y)$$
$$+\sum_{y=x+1}^{\infty}\{ax-\tilde{c}(y-x)\}p(y)$$

また，その帰属度関数は

$$\mu_{\tilde{E}(x)}(z)=\max\{\mathrm{L}((\mathrm{z}-\mathrm{m}\alpha'(\mathrm{x})-\beta(\mathrm{x}))/\alpha'(\mathrm{x})),0\}$$

である．ここで，

$$\alpha'(x)=-\sum_{y=x+1}^{\infty}(y-x)p(y),$$
$$\beta(x)=ax+(a+b)\{\sum_{y=0}^{x}yp(y)-x\sum_{y=0}^{x}p(y)\}$$

である．この場合の最適仕入れ量を求めるにはファジイ数の適当な順序関係が必要である．ここではファジイ数上の順序として[2]で考えられたものを用いると

$$(m+a+x_0)/(m+a+b+x_0)$$
$$>(m+a)/(m+a+b)$$

に注意すれば，最適仕入れ量 x^f について次の関係を得る．

定理1([3])

確率分布関数を $F(x)$ で示す．また

$$F(x-1)\le(a+m)/(a+b+m)$$

を満たす最大の x を x^l，

$$F(x)\ge(m+a+x_0)/(a+b+m+x_0)$$

を満たす最小のxをx^uで示すと，x^fはx^lとx^uの間にある． ■

品切れ費用がファジイでない場合と比較する．センターmが最も可能性が高いことから，cはファジイ数でない確定値mであるとして，従来の場合の最適仕入れ量を求める条件式

$$\sum_{y=0}^{x^*-1} p(y) \leq (a+c)/(a+b+c) \leq \sum_{y=0}^{x^*} p(y)$$

に代入すると定理1のx^lの条件

$$F(x-1) \leq (a+m)/(a+b+m)$$

と同じとなる．従って，このとき，$x^*=x^l$となるが，$(m+a+x_0)/(m+a+b+x_0)>(m+a)/(m+a+b)$より，$x^* \leq x^f \leq x^u$となり，曖昧性があるときは幾分多く仕入れる方がよい可能性があることがわかる．このことは曖昧あるいは不確実な状況の下では安全サイドで考えるという我々の常識的行動と一致しているかと思われる．

とにかく，現代のように多様化された時代には意思決定のためのモデルも現実にあった形で多様化しなければならない．fuzzy random variableはそのような可能性をもっていて，新聞売り子問題のようにファジイな部分とランダムな部分が混在しているモデルも取り扱える．しかし，ベースとなる理論の方が先行して応用についてはあまり研究されていないようでこれからのオペレーションズ・リサーチの課題である．

実際，これまでは，不確実・不確定性を含む状況では，確率要素を含むモデル，ファジイ要素を含むモデルというように別々に扱われてきた．しかし，現実には確率要素・ファジイ要素両方が混ざっているモデルの方が適当な場合も多いように思われる．例えば，従来の線形計画で右辺の定数が確率変動し，係数がファジイ要素である場合は，確率線形計画やファジイ線形計画とは異なる，より現実的なファジイ確率線形計画ができあがるが，これまでは多分考えられてこなかったと思われる．また，一方で，従来のモデルのより現実的一般化として，不確定要素・不確実要素を取り入れたモデルも少しずつではあるが考えられている．組合せ最適化にファジイ要素を導入したファジイ組合せ最適化モデル([4])や，最近注目されているＤＥＡにファジイ要素や確率変動要素を考慮したファジイＤＥＡ([8])，確率的ＤＥＡ([7])等がその例である．

しかし，これら一般化されたモデルの解析・解法にはこれまでにない新しい手法や考え方が必要となるであろう．新聞売り子問題で用いたファジイ数上の順序を一般化したファジイ数のλ－順序([2])や，ファジイ動的計画法([1]，[5])がそのような例である．さらには当然のことながら，最適性の概念や実行可能性の概念についても多様性がでてくる．最適性の概念については従来から多目的計画でいろいろと考えられてはいるが，ファジイ要素，確率変動要素の存在下ではα－最適（制約条件が成り立つ可能性がαの下での最適解，あるいは別の観点から考えると最適解である可能性がα）等一般化あるいは別の考え方も必要かと思われる．実行可能性についても，ファジイ数理計画・確率計画でいろいろ考えられてきているが，さらに上記のような多様性に見合った一般化や別の観点が重要であると思われる．

我々をとりまく実際の問題は本当にこの特集にあるようなすべての要素を含んでおり，これらの統合されたアプローチがますます重要となってくる．我等のORがまさしく本領を発揮する時であり，発揮させるべきであると強く思う．

参考文献

[1] Bellman, R. E., and L. A. Zadeh, "Decision making in a fuzzy environment," *Management Science*, 17(1970)B141-164.

[2] Furukawa, N "A parametric total order on fuzzy numbers and a fuzzy shortest route problem," *Optimization* 10(1994)367-377.

[3] Ishii, H. "Stochastic inventory problems with fuzzy shortage cost," *Proceedings of International Conference on Stochastic Models & Optimal Stopping*, (Ed. K. Sawaki) (1994)93-98.

[4] 石井，ソフト最適化（坂和編）第3章「離散システムのソフト最適化」朝倉書店1995.

[5] Iwamoto, S. and Fujita,T., "Stochastic decision-making in a fuzzy environment", to appear in *J. Operations Res. Japan*.

[6] Kruse, R. and K. D.Meyer : *Statistics* with *Vague data*, D.Reidel Publishing Company (1987).

[7] 森田浩，確率的ＤＥＡモデルについて，1993年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋期研究発表会アブストラクト集，202-203.

[8] 長野他，出力値にファジイ数を用いたＤＥＡ，1994年度日本オペレーションズ・リサーチ学会春期研究発表会アブストラクト集，281-282.