教養講座

多様化時代の数理計画法　第5回
確率計画法 vs. 可能性計画法

乾口　雅弘

1.　はじめに

不明確な係数を含む計画問題に対する数学的手法として，確率計画法と可能性計画法を2回に渡り紹介した．今回は，確率計画法と可能性計画法を比較しよう．

可能性計画法は，ファジィ数理計画法の一種である．確率とファジィといえば，過激な論争が絶えないと考える読者も少なくないだろう．幸いにも，数理計画法の分野では，確率計画法とファジィ数理計画法の表立った論争はほとんどない．むしろ，不明確な係数を含む計画問題に対する類似したアプローチとして，協調しているようにも思える[1],[2]（勿論，ファジィは好きでないと突っぱねる確率計画法の研究者もいる）．実際，定式化の考え方は全く同じであり，相違点は用いる測度や代表値にある[2]．

確率計画法と可能性計画法を比較すると，おおむね，次の二つのことがいえる．

1. 確率計画法では，係数が正規分布に従う場合には，問題が容易に解けるが，その他の場合は，通常解くことは容易ではない．一方，可能性計画法では，どんな形状のファジィ数（可能性分布）をもつ問題でも容易に解ける．一般に，確率計画問題より可能性計画問題の方が容易に解ける．
2. 不明確な係数が独立であるとき，制約条件の数が少なければ，可能性線形計画法では，少数の変数しか非零の値をとらない．一方，確率線形計画法では，多くの変数が非零の値をとる．

本稿では，上の1, 2を具体的に示そう．そこで，1, 2の相違が著しく現れるポートフォリオ選択問題[3]を取り上げ，帰着問題や得られた解を比較する．

いぬいぐち　まさひろ　広島大学工学部
〒739 東広島市鏡山 1-4-1

2.　ポートフォリオ選択問題と確率計画法の適用

2.1　ポートフォリオ選択問題

収益率 c_j の n 種の資産 S_j が取引されている証券市場において，ある一定額を投資する場合，各資産へどのような割合で投資すべきかを考えよう．資産 S_j への投資比率を x_j とすると，投資収益率 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ が最大となるように x_j を決めれば良い．この問題は，

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\text{制約条件} && \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& && x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

と定式化される．通常，収益率 c_j は，時々刻々に変動するので，投資時点に明確に知ることはできない．

ポートフォリオ選択問題では，通常，c_j は確率変数として取り扱われる．一般に，c_i と c_j $(i \neq j)$ には，相関があると考えられるが，確率計画法と可能性計画法の相違を著しくするため，独立であると仮定する．さらに，平均 m_j，分散 σ_j^2 の正規分布 $N(m_j, \sigma_j^2)$ に従うものとする．このとき，c_j は次の確率密度関数 $f_{c_j}(r)$ をもつ．

$$
f_{c_j}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(r - m_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \tag{2}
$$

2.2　有効フロンティア

投資収益率の期待値（リターン）が大きく，分散（リスク）が小さいほど望ましいので，ポートフォリオ

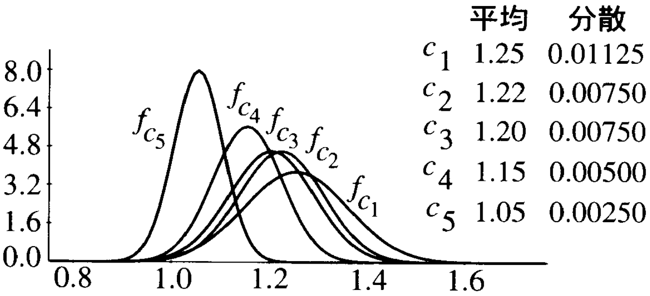

図 1．正規分布

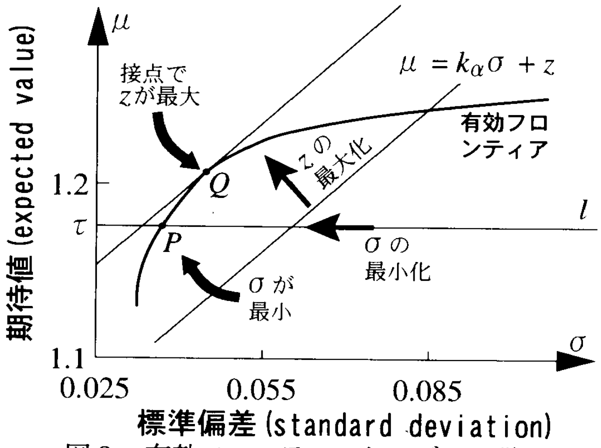

図 2．有効フロンティアとモデルの説明

選択問題は次の 2 目的計画問題として定式化される．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \\
\text{最小化} & V\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \\
\text{制約条件} & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
\qquad (3)
$$

通常，(3) 式には，期待値を最大にするとともに分散を最小にするような完全な最適解は存在しない．そこで，期待値を改善するためには，分散を犠牲にせざるをえないパレート最適解が求められる．一般に，パレート最適解は無数に存在する．

例として，$n = 5$ として，図 1 のように，平均と分散を定めた場合のパレート最適解集合を求めると，図 2 のようになる．図 2 は，各パレート最適解の期待値と標準偏差（＝分散の平方根）をプロットしたもので，有効フロンティアと呼ばれている．期待値が大きく，標準偏差が小さい解が好ましい．有効フロンティアより左上の領域は実行不能領域であり，有効フロンティアは，その名の通り，期待値と標準偏差（分散）とを実行可能な範囲でできる限り改善した境界線である．

2.3 分散最小化モデル

ポートフォリオ選択問題を初めて数学モデルとして取り扱った Markowitz は，(3) 式の一つのパレート最適解を求めるため，投資収益率を一定値 τ にしたもとで，分散を最小化する次のモデルを提案した[3],[4]．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & V\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2 \\
\text{制約条件} & E\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j = \tau \\
 & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
\qquad (4)
$$

この問題は，2 次計画問題であるので，比較的容易に最適解が求められる．

図 2 を用いて，このモデルを説明すると，期待値が τ となる直線 l に沿って，標準偏差が最小になる点 P の解を求めることになる．実際，図 1 の例に対して，$\tau = 1.18$ として，最適解を求めると，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \approx (0.1767, 0.2325, 0.2109, 0.2350, 0.1449)$ となる．リスクを回避するため，分散投資を表していることがわかる．このモデルの欠点は，収益率の大小に関係しない分散を最小化しているので，τ を小さく設定すると，平均，分散がともに小さい資産へ，不要に多く投資してしまうことにある．

2.4 満足水準最大化モデル

確率 $1 - \alpha$ で見込める収益率 z に注目するとき，投資収益率が z 以上である確率が $1 - \alpha$ 以上で，z を最大化する問題として定式化することができる．各確率変数が正規分布に従うことから，この問題は次の問題と等価になることが知られている[4]．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \sum_{j=1}^{n} m_j x_j - k_\alpha \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2 x_j^2} \\
\text{制約条件} & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
 & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
\qquad (5)
$$

ただし，k_α は標準正規分布 $N(0,1)$ の 100α パーセント点であり，$\Pr(k_\alpha \leq X) = \alpha$ となる．(4) 式に比べると，この問題を解くことは，かなり難しいが，2 次計画法を繰り返し適用して解くことができる[4]．この問題を図 2 を用いて説明すると，傾き k_α をもつ線形関数 $\mu = k_\alpha \sigma + z$ の y 切片 z を有効フロンティアと交

わる範囲で最大化する問題で，有効フロンティアとの接点 Q に対応する解が得られる．実際，$\alpha = 0.05$ として，図１の例を解くと，最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \approx (0.3090, 0.3421, 0.2611, 0.0878, 0)$ が得られる．95% と確率をかなり高く設定しても，$x_5 = 0$ となることから，x_5 に投資することはあまり得策ではない．x_5 に 18.76 % も投資する (4) 式の最適解は，消極的な解になっていることがわかる．

確率最大化モデルも同様に適用することができるが，紙面の都合上，省略する．

3. 可能性計画法の適用

3.1 対応するファジィ数と２目的計画問題

以上では，収益率 c_j を正規分布に従う確率変数とした．ここでは，c_j を可能性変数と考える．正規分布に対応して，次のメンバシップ関数で表される正規型ファジィ数 C_j を考える．

$$\mu_{C_j}(r) = \exp\left(-\frac{(r - c_j^{\mathrm{c}})^2}{w_j^2}\right) \tag{6}$$

ただし，c_j^{c} はファジィ数 C_j の中心で，正規分布の平均 m_j に一致させる．また，w_j はファジィ数 C_j の広がりを表すパラメータで，正規分布の標準偏差の $\sqrt{2}$ 倍とする．図１に対応する正規型ファジィ数を示すと，図３のようになる．

(1) 式の c_j を互いに独立で，正規型ファジィ数（可能性分布）C_j で制限される可能性変数と考え，可能性計画法を適用しよう．

期待値が中心，分散（標準偏差）が広がりに対応するので，(3) 式の問題に対して，次の２目的線形計画問題が考えられる．

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{c}} x_j & \text{（中心）} \\ \text{最小化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j & \text{（広がり）} \\ \text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n & \end{array} \tag{7}$$

図３の例に適用すると，(7) 式のパレート最適解集合は，図４に示すような折れ線になる．頂点 V_1, V_2, V_3, V_4 は，それぞれ，資産 S_5, S_4, S_2, S_1 に全額投資する解に対応している．

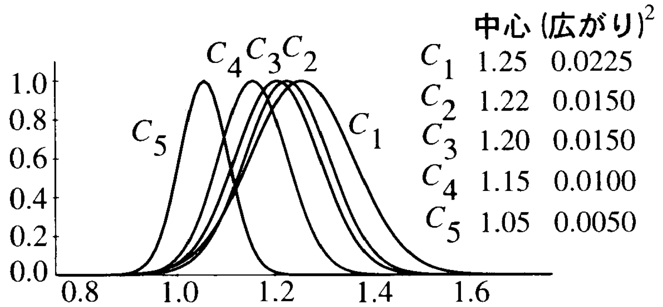

図３．正規型ファジィ数

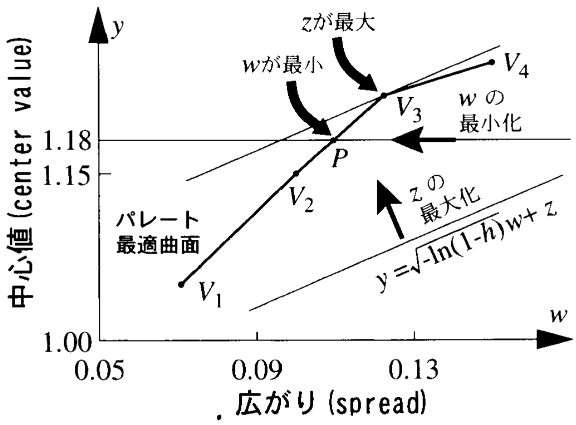

図４．パレート最適曲面とモデルの説明

3.2 あいまいさ最小化モデル

期待値が中心，分散（標準偏差）が広がりに対応することから，(4) 式に対して，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \\ \text{制約条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{c}} x_j = \tau \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{8}$$

なる線形計画問題が考えられる．ファジィ数の広がりは，あいまいさと考えられることから，このモデルは，あいまいさ最小化モデルと呼ばれる．

分散最小化モデルが２次計画問題であったのに対し，あいまいさ最小化モデルは線形計画問題に帰着するので，より容易に解ける．しかし，(8) 式の非負条件以外の制約条件は２本しかないので，n がどんなに大きくとも，通常，高々二つの資産に投資する解しか得られない．たとえば，図３の場合，先と同様に $\tau = 1.18$ として，(8) 式の最適解を求めると，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \approx (0, 0.4286, 0, 0.5714, 0)$ となり，資産 S_2 と S_4 のみに投資する解が得られる．これは，(8) 式の最適解が図４の頂点 V_2 と V_3 を結ぶ線分上の点 P に対応していることからも理解できる．このよう

に，あいまいさ最小化モデルでは，多くの資産への分散投資が得られない．

3.3 満足水準最適化モデル

確率計画法の満足水準最大化モデルと同様に，確実性の度合い h で見込める収益率 z に注目すると，投資収益率が z 以上である確実性の度合いが h 以上で，z を最大化する問題として定式化できる．この問題は，次の線形計画問題へ帰着される．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{c}} x_j - \sqrt{-\ln(1-h)} \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \\
\text{制約条件} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{9}
$$

この問題では，制約条件が１本しか存在しないので，通常，一つの資産への全額投資を表す解が得られる．つまり，目的関数の係数 $(c_j^{\mathrm{c}} - \sqrt{-\ln(1-h)} w_j)$ が最大となる資産 S_j へ全額投資すれば良い．図３の場合について，$h = 0.9$ として (9) 式の最適解を求めると，$x_2 = 1$ で他は 0，すなわち，資産 S_2 に全額投資する解が得られる．このことは，図４において，直線 $y = \sqrt{-\ln(1-h)} w + z$ を平行移動すると，頂点 V_3 で y 切片 z が最大になることからも理解できる．このように，可能性計画法の満足水準最適化モデルでは，一つの資産へ全額投資する解が得られ，一か八かの賭のような解になる．

4. 相関の不明な確率計画と可能性計画の等価性

文献 [2] では，平均ベクトルと分散共分散行列で定められる２次形式メンバシップ関数をもつ可能性計画法は，多変量正規分布をもつ確率計画法と等価になることが示されている．ここでは，互いに独立な可能性変数をもつ可能性計画問題が，確率変数間の相関がわからない確率計画問題に対応することを述べる．

２節では，確率変数が独立であると仮定したが，ここでは，確率変数間に相関があるかも知れないが，それがわからない場合を考えよう．仮に，c_i と c_j の相関係数を ρ_{ij} とすると，分散共分散行列 Σ は，

$$
\Sigma = \begin{pmatrix}
\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\
\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\rho_{1n}\sigma_1\sigma_n & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n & \cdots & \sigma_n^2
\end{pmatrix} \tag{10}
$$

となる．このとき，$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ が従う確率分布は，

$$
N\left(\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \Sigma \boldsymbol{x}\right)
$$

となる．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ である．

相関係数 ρ_{ij} が不明であることを反映して，考えられるすべての ρ_{ij} の組合せの中で，$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ が従う確率分布が最も不明確になるものを選ぶと，$\rho_{ij} = 1$, $\forall i, j\ (i < j)$ となる．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}$ について，次式が成立する．

$$
\max\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} \Sigma \boldsymbol{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j |x_j|\right)^2 \tag{11}
$$

(3), (4), (5) 式においても，分散の項を最悪のもの，すなわち，(11) 式に置き換えよう．このとき，$m_j = c_j^{\mathrm{c}}$，$\sigma_j = w_j/2$ に注意すると，(3), (4), (5) 式は，それぞれ，(7), (8), (9) 式と等価になる．このように，確率変数間の相関がわからない場合の最悪の分散を用いた確率計画法と可能性計画法は等価となり，この等価性から解釈すると，(8), (9) 式の解も納得できる．

なお，上述のような等価性は，正規分布を用いたことや，すべてのファジィ数が同じ形状と仮定したことにより成立したが，一般に成立するとは限らない．しかし，詳細は省くが，独立な可能性変数をもつ可能性計画問題は，可能性変数間の相互関係がわからない場合を取り扱っているとみなすこともできる．

5. 最大リグレット最小化モデル

収益率が独立な可能性変数となるポートフォリオ選択問題では，多くの資産への分散投資を示す解が得られなかった．ここでは，この場合にも分散投資が得られる，最近，著者ら[5]が提案したモデルを紹介しよう．

二つの資産 S_1，S_2 への投資を考えよう．S_1 へ全額投資した後，それぞれの資産の収益率が $\boldsymbol{c} = (1.05, 1.2)$ となったとしよう．つまり，S_2 へ全額投資しておけば，最大の収益率 1.2 が得られたのに，S_1 へ全額投資したために 1.05 の収益率しか得られなかった．すなわち，$1.2 - 1.05 = 0.15$ であるから，最適投資案に比べて，15% の収益を逃したことになる．このことより，S_1 へ全額投資する案 $\boldsymbol{x}$ を選んだことによるリグレット（残念度）$r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ を，$1.2 - 1.05 = 0.15$ と定めることができる．

結果として得られる収益率 $\boldsymbol{c}$ は，決定時点には明確にわからず，可能性変数となる．したがって，リグ

レット $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ も決定時点には不明確で，可能性変数を含む関数（可能性関数）になる．リグレットは小さい方が好ましいから，可能性関数 $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ の最小化問題が考えられる．この問題に満足水準最適化モデルを適用しよう．すなわち，リグレット $r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ が q 以上である確実性が h 以上のもとで，q を最大化する問題を考える．

n 個の資産があり，各資産の収益率が互いに独立な可能性変数であるとすると，この問題は，次の線形計画問題に帰着される．

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad q \\
&\text{制約条件} \quad \sqrt{-\ln(1-h)}\left(w_i x_i - \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} w_j x_j\right) \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n} c_j^{\mathrm{c}} x_j + q \geq c_i^{\mathrm{c}} + \sqrt{-\ln(1-h)}\, w_i, \\
&\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
&\qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{12}
$$

たとえば，$h = 0.8$ として，図３の例に適用すると，$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \approx (0.4080, 0.3067, 0.2528, 0.0325, 0)$ なる最適解が得られる．資産 $S_1 \sim S_4$ への分散投資を指示する解となっている．

このリグレットに基づく方法を確率計画問題に導入することも可能であるが，一般に，定式化された問題を解くことは困難となろう．可能性計画問題は比較的取り扱い易いので，このように種々のモデルの導入が容易である．

(4), (5), (8), (9), (12) 式の解を比較するため，解の帯状グラフを図５に示す．分散最小化モデルでは，τ を小さく設定したので，不要に多く S_5 へ投資している．また，あいまいさ最小化モデルや満足水準最適化モデル（可能性計画）では，一つまたは二つの資産に賭けるような投資になっている．満足水準最大化モデル（確率計画）や最大リグレット最小化モデルの解は，比較的受け入れやすい解である．勿論，τ, α, h の設定に応じて異なった解が得られるので，用いるモデルの選択と合わせて，これらのパラメータの設定も肝要である．多目的計画法のような対話型手法の導入が期待できる．

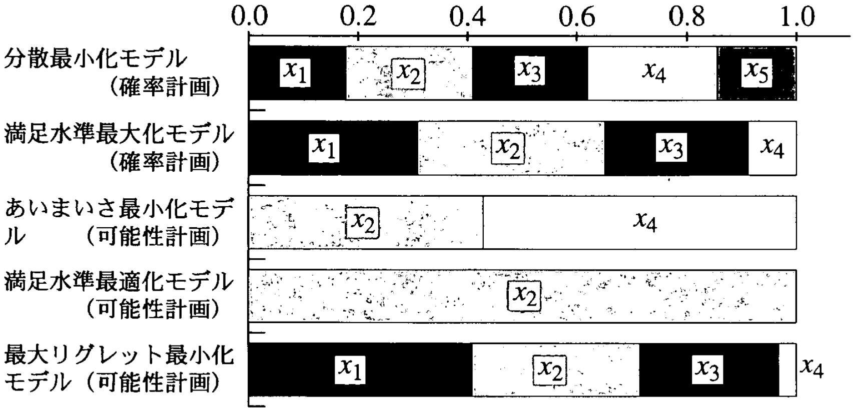

図５．各解の比較

6. おわりに

確率計画法と可能性計画法をポートフォリオ問題を通して比較し，帰着問題の難易度や，得られる解の性質から，両手法の特徴について考察した．一般に，問題の取り扱い易さの面では，可能性計画法が優れている．しかし，可能性計画法では，制約条件が少ない場合には，極端な解が得られることもある．いずれのアプローチ，いずれのモデルを用いるかは，問題の設定や意思決定者の意向との適合性および解法の難易度の，ニーズとシーズの面からの検討による．

次回は，本連載の最終回として，多目的計画法や，確率計画法と可能性計画法の最近の話題や今後の応用を展望する．

参考文献

[1] Słowinski, R. and Teghem, J. (Eds.): *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers (1990).

[2] 乾口雅弘：“確率計画問題とファジィ数理計画問題”，日本ファジィ学会誌, 4 (1993) 21–30.

[3] 今野浩：“理財工学 I：平均・分散モデルとその拡張”，日科技連 (1995).

[4] 石井博昭：“確率論的最適化”，伊理，今野編，数理計画法の応用＜理論編＞，産業図書 (1982) 1–40.

[5] 乾口雅弘，坂和正敏：“ポートフォリオ選択問題へのファジィ数理計画法の適用に関する一考察”，第11回ファジィシステムシンポジウム講演論文集 (1995) 253–256.