ワラント・転換社債評価の考え方

髙橋　正文

1．はじめに

本稿ではオプションの周辺にある証券の中でも，最もオプションに近く，身近な応用先であるワラントと転換社債に焦点を当て，プライシングの考え方，評価方法について論じる．

これらの証券に馴染みのない読者のために，簡単な説明を加えておく．我が国企業の資金調達方法は銀行借入以外に4つあり，株式発行(増資)，社債発行，転換社債発行，ワラント債(新株引受権付社債)発行である．後二者は発行当初社債として市場に登場するが，償還までの機関に契約に定められた一定の条件で当該発行企業の株式への転換権利もしくは新株の購入権利が付与されている証券である．近年割引債タイプが流通する例も聞くが，これらの証券の圧倒的多数はクーポン債である．また，転換社債・ワラント債とも権利の行使の時期が任意のアメリカンが一般的である．ワラント債には分離型と非分離型があり，我が国で流通しているワラント債は圧倒的に分離型である．分離型は新株引受権部分と社債部分を独立に流通・売買することができ，前者は通常ワラント，後者はエクス・ワラントもしくはポンカスと呼称される．非分離型は転換社債と全く同じ性質を持つと考えられがちであるが，重要な相違点がある．ワラントも転換社債もこれを発行した時点では，投資家は現金を払い込んで社債を購入し，企業は投資家に対して負債を負う．一方，株式への転換時点を考えると，転換社債では負債が同時に消滅することになるが，ワラントでは契約時点で定めた行使価格分の現金を払い込む必要がある．しかも，投資家は社債を手元に残しており，したがって企業の負債構造は変わらない(社債による代用払い込みもある)．ワラントと転換社債では企業の財務構造に与える影響が微妙に異なるのである．

本稿の構成は前半をワラント，後半を転換社債の評価に割り当てる．Black & Scholes のオプション価格公式(以下Ｂ＆Ｓ公式と呼ぶ)の導出方法や意味については本誌内の別の記事もしくは他の参考文献で参照している前提で論旨が展開される．本稿では紙幅の関係上ワラント・転換社債の実証的なモデルのみを紹介し，これらモデルの特徴に言及する．特に，ワラント・転換社債の長期オプション的性格は，現在上場されている短期オプション市場のプライシングで絶大な信頼性と頑強性を誇るＢ＆Ｓ公式の理論的枠組みでは捉えられない市場特性を多数見いだすことができ，Ｂ＆Ｓ理論の修正と拡張が必要不可欠である．

本稿では主に実務的な観点から現実的な解決方法を提示する．本稿の最後では，応用として特殊な条件のついた擬似転換社債のプライシングについても触れる．すべてのモデルに言及できなかった代わりに，参考文献を多数掲載しておいた．必要なら参照して欲しい．

2．ワラント価格市場のデータ

ワラント売買の現場ではワラント価格や，これにひも付けされている株式価格を市場で取引されている金額そのもので呼ぶことは稀であり，ワラント契約時点で定められる行使価格で規格化された表現が用いられている．以下これをパリティ表現と呼ぼう．パリティ表現では，行使価格Ｋ，株価Ｓ，ワラント価格Ｗは，

$$x=S/K\cdot 100,\quad w=W/K\cdot 100,\quad k=K/K\cdot 100=100$$

で定義される x, w, k に変換される．規格化された株価 x を特別にパリティと呼ぶ習わしである．定義から明らかなように，パリティ表現では行使価格は常に100円である．この規格化のおかげで，株価水準の異なるすべてのワラントを同じ次元で評価し，価格を比較

たかはし　まさふみ　筑波大学社会工学系
〒305 つくば市天王台1－1

することが可能である．

何はともあれワラントの姿を直視し，問題を浮き彫りにする目的で，ワラント市場で形成される価格の現実のデータを見ることにする(図1)．この図は横軸を株価にとり，縦軸にワラントの価格をプロットしたものである．この図を作成するに当たって採用された銘柄数は11個であり，それぞれ残存年数，ボラティリティなど個々の銘柄属性は異なるのであるが，幾つかの共通した特徴を読み取ることができる．

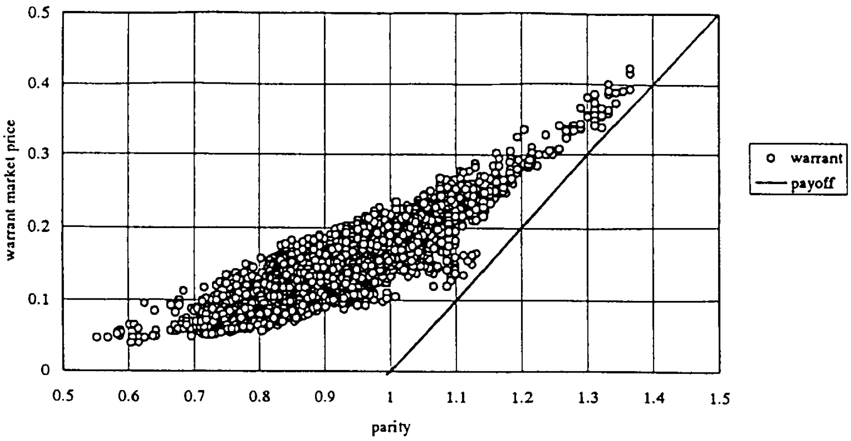

図1　実ワラント市場の価格形成

1）プロットした価格データの中心を通る曲線を描けば，下に滑らかに凸の曲線である(実際に intercept 項のない株価のべき関数でデータを非線形回帰すれば，1次～2次の間の次数で近似される曲線であることが確認される)．中心曲線からの乖離(膨らみ)は，銘柄固有の属性が反映されていることを示唆する．

2）現実のワラント市場は Samuelson 公式(後述)に従って動きたがっているように見える．特に Deep-In-The-Money(以下 DITM と略称)ではパリティ線(ワラント行使後の損益を示す直線)に到達寸前であり，Samuelson が分析した最適行使株価の存在を示唆している．

3）1)，2）の事実をB＆S公式との比較で言い直せば，数年間の残存期間をもつワラントの時間価値が，At-The-Money(以下 ATM と略称)から In-The-Money(以下 ITM と略称)領域でB＆Sでは過大評価することを意味する([髙橋他, 1990]，[Takahashi, 1995]，[刈屋, 1995])．

上記に述べた特徴を補足すれば，ワラント市場が活況であった1990年以前のデータを用いて同じ図を描けば，2）の示唆，すなわち最適行使株価の存在は確信に変わることをつけ加えておく．ワラント市場関係者は，ワラントがパリティ線上に到達する状態を，オン・パリティと呼び，市場が活況であればワラントに固有の，ごく自然な特徴であることを知っている．今後は，上記特徴や下記に示した図が市場の事実であることを踏まえながら，議論を展開していこう．

3．ワラントの価格評価

現在ワラントの評価で主流となっている評価モデルはB＆S公式を直接利用することである．しかしながら，市場のデータ，特にITMの領域で，ワラントはB＆Sの利用を拒むように見える．逆に，B＆S公式は正しいが，市場評価は常に割安であると断言する研究者もいるようである．さて，理論的には問題があると考えられている解析的モデルの中で，1つだけワラントの価格形成が現実と矛盾しないと思われるモデルが存在する．それは残存期間に依存しないオプションを扱った Samuelson のパーペチュアル・ワラント公式である[Samuelson, 1965]．Samuelson の公式は現代のオプション理論からは許容できない2つの欠点がある．1つは裁定理論を無視していること，2つ目はオプション・トレーディングに不可欠な金利・時間・ボラティリティという重要なパラメータに依存しない公式であるということである．本稿では，Samuelson の公式が市場の事実に近い評価をしている点に注目して，まず，その公式そのものを紹介し，後に Samuelson の問題の解決を図り，現実的なモデルとするための実務的解決方法(拡張 Samuelson 公式)を紹介する．

4．Samuelson のパーペチュアル公式

Samuelson の公式は，株価を S として以下の微分方程式と境界条件を満たす解：$W(S)$ である．

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} + \alpha \frac{\partial W}{\partial S} - \beta W = 0 \qquad (1)$$

$$W(S^*) = S^* - K, \quad \left[\frac{\partial W(S)}{\partial S}\right]_{S=S^*} = 1 \qquad (2)$$

ただし，α, β, S^*, K, σ はそれぞれ，株式期待リターン，ワラント期待リターン，最適行使株価，行使価格およびボラティリティである．解は次のとおり．

$$\begin{aligned} W(S) &= (S^* - K)\left(\frac{S}{S^*}\right)^{\gamma} & S < S^* \\ &= S - K & S \geqq S^* \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\gamma = S^*/(S^*-K) \tag{4}$$

最適行使株価は，ワラント最大の特徴をモデル内で明示的に表現するためにSamuelsonが導入したパラメータであって，後の章ではS^*_∞として再び議論される．株価がこの点に到達すると，翌日までワラント・ポジションを持ち続ける価値と，行使して株式に交換した価値が等しくなる．したがって，この点を境に，長期American callとしてのワラントはいつでも行使可能である．

微分方程式(1)式と解(3)式からわかるとおり，残存(時間)依存にはなっておらず，また，株式・ワラント・預金市場間の裁定関係が使われていないため，金利もモデルの中に入ってない．ボラティリティは陽には現われていないが，実はγの中に隠されており，

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2(\beta-\alpha)}{\sigma^2}} \tag{5}$$

である．(5)式は推定の困難なパラメータα, βが含まれており，実務上は(4)式のままで用いられることが多い．その結果，ボラティリティも放棄される．B＆S以降の伝統的な数理ファイナンスの立場では，Samuelson公式は理論的に不完全とみなされ，モデルとしての選択が放棄されてきた．しかし，市場データを信ずる限り，結論はSamuelsonを支持するように思われる．

Samuelsonの公式は時間パラメータを明示的に含まないが，$S=S(t)$として株価を通して間接的にかかわっていると考えられる．以下の議論に備えるため，Samuelsonの解をパリティ表現で以下のように書き直しておこう．

$$w(x(t)) = (x^*(t)-k)\left(\frac{x(t)}{x^*(t)}\right)^{\gamma(x^*(t),k)} \quad \text{if } x(t) < x^*(t) \tag{3'}$$

$$\gamma(x^*(t),k) \equiv x^*(t)/(x^*(t)-k) \tag{4'}$$

5．拡張Samuelsonワラント公式

Samuelsonモデルを伝統的な議論(無裁定)と整合させながら，オプション・トレーダーの要求，すなわち金利・ボラティリティおよび残存期間に依存させるように拡張したい．この方法はTakahashi [1995] に詳しいが，近似的に正しいという意味で可能である．この手法はAppendix in Barone-Adesi & Whaley [1987]を参考とする．株価の確率プロセスはWienerに近似的に従うと仮定されている．詳細は上の2つの論文を参照されたい．結果のみを示せば，金利・時間・ボラティリティ依存の拡張Samuelson公式は以下のとおりである [Takahashi, 1995]．

$$\begin{aligned} w(x) &= x-k & x &\geq x^* \\ w(x) &= (x^*-k)\left(\frac{x}{x^*}\right)^{\gamma} & x &< x^* \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} x^*(r,\sigma,\tau) &= k + [x^*(\infty)-k] \\ &\quad \times [1-\exp(-h(r,\sigma,\tau))] \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} h(r,\sigma,\tau) &= \frac{k[r+2\sigma\sqrt{\tau}]}{x^*(\infty)-k}, \\ \gamma(r,\sigma,\tau) &= \frac{x^*(r,\sigma,\tau)}{x^*(r,\sigma,\tau)-k} \end{aligned} \tag{16}$$

上記の式は数学的には多くの仮定を使って導かれているが，それらの仮定がそれほど非現実的ではなく，したがって上式が現実的に市場で形成される$x(r,\sigma,\tau)$の望ましい性質を幾つか含んでいる事実は，以下の思考実験で確認される．他の条件が同一ならば，

①ボラティリティの上下⇔$x^*(r,\sigma,\tau)$の上下

②残存期間の大小⇔$x^*(r,\sigma,\tau)$の大小

③$x^*(r,\sigma,\infty)=x^{*(\infty)}$(Samuelsonの最適株価)

④$x^*(r,\sigma,0)=k$

6．その他のワラント価格評価について

Shelton [1967]，Kassouf [1968] やワラントをパリティで回帰したモデルなど，統計的手法を使ったモデルがあるが，理論上の主流ではない．興味があれば末尾の文献を参照して欲しい．Marsh [1995] はB＆S公式が利用できない問題を扱っており，一読すべき文献である．

7．転換社債の価格評価

転換社債は株式と債券の両特性を併せ持つ複合証券である．転換社債はワラントと同様，パリティ表現(転換価格で規格化)で価格が呼ばれ，その時の株価もパリティと呼称される．まず，すべての変数を転換価格で規格化することからスタートする．基本となる関係式は証券に明記される次の転換条件である．

$$B(T) = \xi K \times 100 \tag{17}$$

この式の意味するところは，発行債券の額面$B(T)$を株式価値に換算する時，換算基準価格をKとすれば転換できる株数がξになる，と言っている．等価値となる株式数と債券の額を結び付けるとともに，互いに異なる水準で変動する双方の価格を規格化する意味をも持つ．1株当たりの価値を求めるため(17)の両辺をξKで割ると(したがって債券の額面で除すことと同値)，債券の額面は100円に変換され，同時にパリティ

表示では転換価格も100円に規格化されることはワラントの場合と同様である．転換価格が変更にならない限り転換株数は期中に変更されないので，株価が高くなって転換価格を超えた差額相当分，対応する債券の償還額面の価値を超える．故に転換価格はオプションの行使価格に相当する変数である．

転換社債はクーポン付社債価値を原資産とし，これに加え将来株価が転換株価を超えた時に株式に転換する権利が付与されているのであるから，転換社債の評価モデルは，

転換社債価値＝社債価値＋株式転換権利価値　(18)

で近似できよう．契約条項の中には期中の債券時価に依存して権利が変更されるような記述は一般的にはないので，転換権利価値部分は株式価格の変動のみに依存すると考えるのが自然である．言うまでもなく取引の現場などで利用されるリスクフリー・レートやボラティリティは一定であると仮定しておく．転換価格($k=100$)が与えられた時，他の特別な制約や付加価値が加わる理由は何もないので，上記権利の価格は単純なＢ＆Ｓ公式が利用できる．こうして，転換社債のパリティ表現式が下記のとおり得られる．

$$
\begin{aligned}
&CB(x, \sigma, \tau, k, r, b(\tau)) = b(\tau) + xN(d) \\
&-ke^{-r\tau}N(d-\sigma\sqrt{\tau}) \\
&d \equiv \{\ln(x/k) + (r+1/2\,\sigma^2)\tau\}/\sigma\sqrt{\tau}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ただし，$N(d)$は正規確率分布関数である．ほとんどの転換社債は期中いつでも転換権利を請求できるアメリカンとして発行されており，その観点から上記の式はヨーロッピアン近似と理解すべきである．この近似が正しいかどうかの判断基準は転換社債市場の実データとモデル(理論)価格の比較によって与えられるべきであるが，後ほど説明するとおり，利用限界が指摘されている．

次の話題に移る前に，転換社債に内在する債券価値について，考慮すべき注意事項を２点だけ指摘しておく．まず第１に，転換社債の債券価値が，通常の債券評価のように金利の期間構造から計算される厳密な理論価格を流通市場で忠実に反映するかどうかの問題である．第２に，転換社債はひとつの証券として流通するのであって，株式価値＋債券価値というモデルにとって都合のよいように価値の分離はできない．カム・ワラントで債券と引受権が切り離されて単独に流通する場合とは本質的に異なる証券として認識する必要がある．実際，価値が不明な債券価値を推定すべき変数としてとらえるべきであるとの観点から評価を試みた研究や論文も幾つか存在する(たとえば，[Takahashi, 1995]，[刈屋，1995]など)．本稿でもこの観点を踏襲し，以下では債券価値を内在債券価値と呼び，一般の債券とは区別しておく．

8．転換社債市場価格データの特徴

転換社債の取引現場である市場価格を注意深く調べると，２つの特徴が指摘される．第１にDITMにあるほとんどすべての転換社債は，市場関係者がオン・パリティと呼んでいる状態に到達する．オン・パリティとは，債券価値が消失し，転換社債の価格が株式価値単独の評価と一致する状態のことである．第２に，ボラティリティや残存期間など他の変数の影響が出るため，かなりの膨らみを考慮に入れなければならないが，横軸株価，縦軸転換社債価格にとった座標で市場価格をプロットすると，銘柄間で属性がずいぶんと異なるにもかかわらず，価格は下に凸の標準価格曲線上に載っているように見える．オン・パリティ後は株式の状態を維持したがる事実は，第１に述べた特徴そのものである．これらの特徴を図で示せば，図２のように簡略化できる．理論が市場と整合的であることを要求するのであれば，価格評価にはこれらの特徴を含むようにモデル化されるべきであろう．

第１の特徴は，式(19)では大きな問題をかかえる．債券価値と転換価値(株価の関数)が互いに独立しており，しかもどちらの価値も必ず正符号であるから，債券価値が100円を超えるオーバー・パーの状態で常に転換社債を過大評価し，オン・パリティの状態は決して実現されない．一方，債券価値が100円を下回るアンダー・パーの状態のとき，高株価水準で常にアンダー・パリティ(転換社債の価値がパリティ線の下に潜りこむ状態をこう呼ぶ)の状態となって，転換社債を過少評価することになる．この望ましくない状態は，オプション用語では，必ず正の符号を持つ時間価値が，負になる状態としてとらえることが可能である．(19)式を利用する場合，すべての株式相場・金利相場でこの問題を理論的に回避できる唯一の方法は，社債価値を割引債でのみ評価することであり，その時に限られるが，クーポンを無視するのはあまりに非現実的であり，現実の取引・運用担当者に受け入れられる仮定ではない．

第２の特徴について，少なくとも定性的な議論のレベルでは(19)式は市場価格曲線を部分的に説明可能である．たとえばモデル価格曲線は下に凸であるし，ATM

からOTMに至る領域で，ボラティリティを調整することによって市場価格とモデル価格のフィッティングを実現することができる．しかしながら，ITM(特にディープの場合)の領域ではボラティリティやリスクフリー・レートなどの変数の調整だけではフィッティングが困難な状況が容易に発生する．

以上によって，市場の事実を念頭に置く限り，(19)式には適用限界が存在することが理解できた．この問題を解決ないしは改善し，しかも転換社債の性質に無矛盾なモデルがこれから説明するMargrave型であり，次の章のSamuelson型の評価モデルである．

9．Margrave型転換社債価格評価

Margraveは，拡散プロセスに従って変動する2つの資産を，将来の時点で交換するオプションの価格を求める公式を導きだした［Margrave, 1978］．一般にこのオプションはexchange option(資産交換オプション)と呼称されるが，B&S公式との比較でMargraveの式を直感的に描写すれば，権利行使価格を一定にした式がB&Sで，これを確率変動させた場合がMargraveである．Margraveの公式の導出方法は，直接論文に当たるとして，結論を示せば以下の式である．

$$C(S_1, S_2, \sigma, \tau, K) = S_2N(d) - S_1N(d-\sigma\sqrt{\tau})$$
$$d \equiv \{\ln(S_2/S_2) + 1/2\,\sigma^2\tau\}/\sigma\sqrt{\tau} \tag{20}$$

ただし，上式はS_2を所有している人が将来S_1と交換する価値を示し，もし交換が反対ならばS_1，S_2の順番を変える必要がある．

転換社債は，現在社債を持っている投資家が満期日までに有利となった場合に株式と交換する権利を同時に持っている証券であると考えれば，Margraveを直接応用する意味が判明する．この時パリティ表現でのMargraveの公式は，

$$C_p(x, b(\tau), \tau, \sigma) = xN(d_1) - b(\tau)N(d_2) \tag{21}$$

$$d_1 \equiv \{\ln(x/b(\tau)) + 1/2\,\sigma^2\tau\}/\sigma\sqrt{\tau},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

であるから，初めから所有している$b(\tau)$と合わせて，

$$CB(x, b(\tau), \tau, \sigma) =$$
$$b(\tau) + xN(d_1) - b(\tau)N(d_2) \tag{22}$$

を得る．B & S 公式を利用した(19)式との違いは転換行使価格の割引債表現$ke^{-r\tau}$がクーポン債の現在価値$b(\tau)$に変化していることである．

転換行使価格が社債額面のkではなく$b(\tau)$に変化したことによって，このモデルでは理論・現実の両面との整合性を維持できなくなる可能性があるから，次にこの問題を議論しておこう．満期時には$b=b(\tau)$も社債額面に収束し，(19)式も(22)式も同一の式になって区別できないので，期中のみについて考えれば十分である．x，b，kの大小関係は次の6通り存在する．

① $x>b>k$，② $x>k>b$，③ $k>b>x$，
④ $k>x>b$，⑤ $b>x>k$，⑥ $b>k>x$．

これらすべてのケースで転換社債における実質の転換行使価格が内在債券価値bであることが証明できればMargraveの利用は理論的に正当化されよう．

まず① $x>b>k$の時，投資家はいつでも転換が可能である．しかし，⑤ $b>x>k$または⑥ $b>k>x$の時，株価が転換価格を超えていようがいまいが転換は発生しない．内在社債価値が株式価値を超えているから，転換せず社債のまま持ち続けているほうが明らかに投資家には有利である．したがって，これらの場合(①，⑤，⑥)，投資家に認識される実質転換行使価格は内在債券価値bである．

次に② $x>k>b$または③ $k>b>x$または④ $k>x>b$の時，投資家に認識される実質転換価格は契約時点で定まる転換価格kで，B&S公式が成立するかのように思われる．しかしながら，この場合内在債券価値は常にアンダー・パーであるから，もしB&S公式が利用できるのであれば前章で述べた不都合な現象(時間価値が負)が起こり，アメリカンの性質を持つ転換社債では裁定機会が発生する．この裁定機会を任意の$b<k$で回避できるのはkがbに限りなく近い場合，すなわち実質転換行使価格をbとみなせる時(あたかも転換価格が内在債券価値であるかのごとく投資家が行動する時)のみである．その結果B & S公式の転換行使価格をbで置き換える必要が生じ，再びMargrave公式が出てくるのである．以上①～⑥のケースのすべての場合において，実質転換行使価格はbである．したがって，株式価値xが内在社債価値bを超えている場合に限られることを明示的に示した転換条件；

$$\text{exercise } CB = x \quad \text{only when } x \geq b. \tag{23}$$

を追加すると，転換権利価値のパリティ線はx-bであることが判明する．

図で上記事情を確認しておけば，パリティが転換価格(横軸100円)を超えた範囲で，CB_1の価格曲線上の点では$x>k=100$で転換がいつでも可能と考えられるが，CB_2の価格曲線上の点では$x>k=100$であって

も転換は極めて考えにくい．転換すると，時間価値を失うのみならず，内在債券価値(＞株式価値)をも失い，せっかく投資した意味がないからである(図中○→●)．もしこの時ポジションを解消したい投資家がいるのであれば，転換ではなく，市場での転売が選択される．

10. Samuelson 型転換社債評価

ワラントの章で記述した評価モデルは，転換社債の評価にも応用可能である．ワラントと転換社債は，市場における価格形成について様々な共通点をもつ．特筆すべき第1の特徴はDITMのオン・パリティ状態である．さらに，標準オプションに比べて残存期間が長い，いわゆる長期オプションの性格を持ち，また株価を行使価格で基準化したパリティ表現で価格が呼称されるのも共通点である．市場における価格曲線が類似しているのであれば，これを応用したいと考えるのは自然な発想であろう．

Samuelsonの価格公式を使う場合，転換価格についてMargraveの章で議論した考え方がそのまま利用できることを思い出しておきたい．そこでの議論は一般的であり，結論を直接使うことができる．すなわち，転換社債の実質転換価格は内在社債価値である．さらに，考えている期間中金利，ボラティリティも一定であると仮定しておこう．モデルの実務的な応用上でこれらの変数の変動を許容するのは，B＆S公式で金利，ボラティリティの変動を応用上許容することと同じ趣旨である．かくしてワラントの行使価格 k を形式的に内在社債価値 b で置き換えることによって，転換社債のモデルが得られる［Takahashi, 1995］．

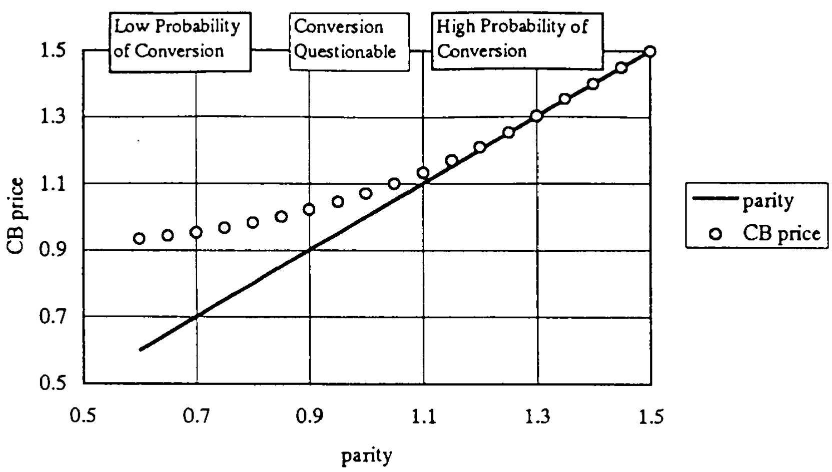

図2　転換社債市場価格のモデル図

$$
\begin{aligned}
CB(x, b(\tau), \tau, \sigma, r) &= b(\tau) + (x^* - b(\tau))\left(\frac{x}{x^*}\right)^{\gamma} && \text{if } x \leq x^* \\
&= x && \text{if } x > x^*
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
& h(x, b(\tau), \tau, \sigma, r) = b(\tau)(r\tau\, 2\,\sigma\sqrt{\tau})/(x^*_\infty - b(\tau)) \\
& x^*(b, (\tau), \tau, \sigma, r) = b(\tau) + \\
& \qquad (1 - \exp(-h(b(\tau), \tau, \sigma, r)))(x^*_\infty - b(\tau)) \\
& \gamma(x^*, b(\tau)) = x^*/(x^* - b(\tau))
\end{aligned}
\tag{26}
$$

である．

Samuelson型転換社債モデルの意義は，転換社債に特有なオン・パリティの予想価格 x^*（これを最適転換株価と呼ぶ［Takahashi, 1995］）をモデル上で直接表現できることである．株価が x^* に近づくと理論上いつでも転換が可能となるので，この転換点を予想できる手段があることは転換や売買のタイミングの意思決定を行う上で重要な情報を与える．x^*_∞ は残存期間が無限大の転換社債のオン・パリティ価格であるこれが与えられれば(応用上は x^*_∞＝200～300円で固定すればよい)，金利・ボラティリティ・残存期間によって他の変数が自動的に計算可能となり，モデルの利用可能性も高い．

11. その他の転換社債評価

他に紹介すべき転換社債評価モデルの中では，財務論や企業価値の立場からモデル化を行っているIngersoll［1977］のモデルを忘れてはならない．我が国でもこのモデルを紹介し，あるいは同じ立場から評価を試みた論文も多い(たとえば，［飯原・国村，1989］，［河内，1995］)．この評価モデルでは，企業価値をどのような証券の構成として設定するかに拡張性を持ち，また希釈化ファクターをダイレクトに取り込めるなどの長所を持つ反面，企業価値のブラウン運動性が現実的な仮定かどうかの議論や現実にこのモデルを利用する際の簡略化の帰結として結局B＆S公式に帰着するなどの問題点も指摘されている．逆に言えば，修正や一般化の可能性を秘めたモデルであるから，今後の発展が期待される．

12. 転換制約条項付き証券の評価

転換社債は，株式と社債両方の性質を持つが，基本的な性格は社債のロング・

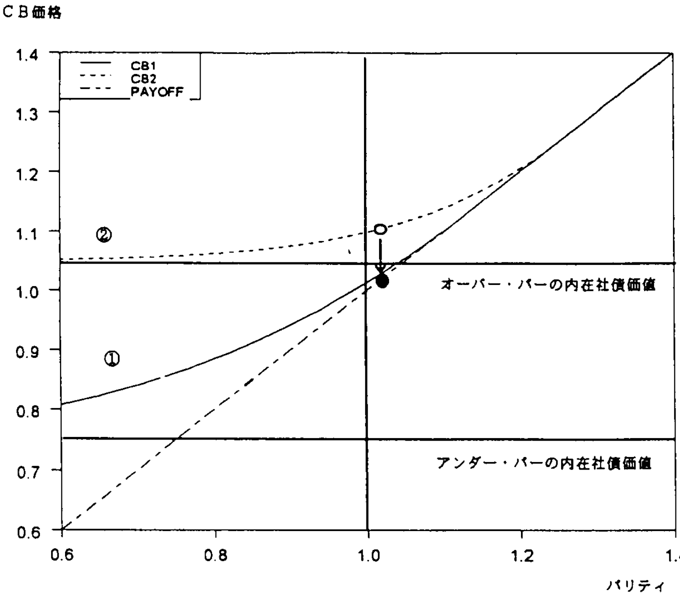

図3　転換可能CB①と転換疑問のCB②

ポジションである．株式転換が有利になり，転換権利を行使して初めて株式そのものに変貌する．一方，これから紹介する証券は発行時点で株式・債券どちらになるのか決められておらず，満期までの証券の価格経路によって株式・債券どちらか一方が受領できることを契約条項に入れた証券である．この証券の原資産は当該証券発行企業の株式と社債であってもよいし，別々の企業の株式・社債であってもよい．場合によっては日経指数と国債指標銘柄の間の契約であってもよいだろう．

転換社債の償還条項とパリティの考え方を踏襲するため，この証券には株式の価格と債券償還額面に，

$$B(T)=\xi K \tag{27}$$

の契約が結ばれている．ただし ξ は転換株式数で，K は株式転換価格であることは，転換社債と同じである．もし，転換社債であれば $S>K$ の時に転換が起こる．この証券の場合には転換について以下の制約を課しているものとする．すなわち，契約期間中株価がある株価水準 (E) を一度でも下回れば，以後株価水準の上下如何にかかわらず満期時に ξ 枚の当該株式を受け取り，それ以外のケースでは満期時に債券の額面を受け取る，という契約証券である．

ただし，ひも付けされている債券のクーポンはどちらのケースが起ころうと独立に受け取れるものと仮定しておく．設問の趣旨から $K \geq E$ であることは明らか．この証券は満期時点までの状態が確定するまで転換ができないヨーロッピアン・タイプであることも仮定しておく．さて，この証券の市場での価格をどのように評価したらいいだろうか．

契約に設定された株価 $q=E/K$（これを消滅株価と呼ぶ）に期間中一度でも到達すれば，この証券はそのまま株式として役割を終え，それ以外では満期時に確定値である債券の額面を受け取るというのであるから，株式価値を基本に，満期時点 T のペイオフ；

$$C(T)=x(T)+[b(T)-x(T)]=b(T)$$
$$\text{if } x(\tau)>q\,(0<\tau<T) \tag{28}$$
$$C(T)=x(T)+0=x(T) \qquad \text{otherwise}$$

を得るようなポジションを作ることができれば，同一の価値が複製される．この目的を実現するのに便利な考えは，down and out option を利用することである．このオプションは，消滅株価に到達した時点で権利が消滅するように設計された証券であり，上記証券の性質はこのオプションが内蔵されていると考えれば，直接的で最も分かりやすい．

以上で準備は整った．消滅株価 q を持つ株式の確率密度関数 f は，下方 q に吸収壁のあるブラウン運動の条件付推移密度関数と解釈されるから，

$$f(x(\tau),\tau\,;\,x,0)=N'(d_x)-\left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma_2}-1}\cdot N'(d_q) \tag{29}$$

ただし，$N'\equiv\partial N/\partial x$ で，

$$d\equiv\{\ln(x(\tau)/x)-(r-1/2\,\sigma^2)\tau\}/\sigma\sqrt{\tau} \tag{30}$$

$$d_q\equiv\{\ln(x(\tau)x/q^2)-(r-1/2\,\sigma^2)\tau\}/\sigma\sqrt{\tau} \tag{31}$$

で定義される（詳細は，たとえば［池田，1990］を見よ）．この密度関数を使って，$b(T)-x(\tau)$ の将来の期待値を求め，金利 r の割引率で現在価値に戻す．すなわち，

$$C_q(x,\tau,\sigma,r\,;\,q,b(T))$$

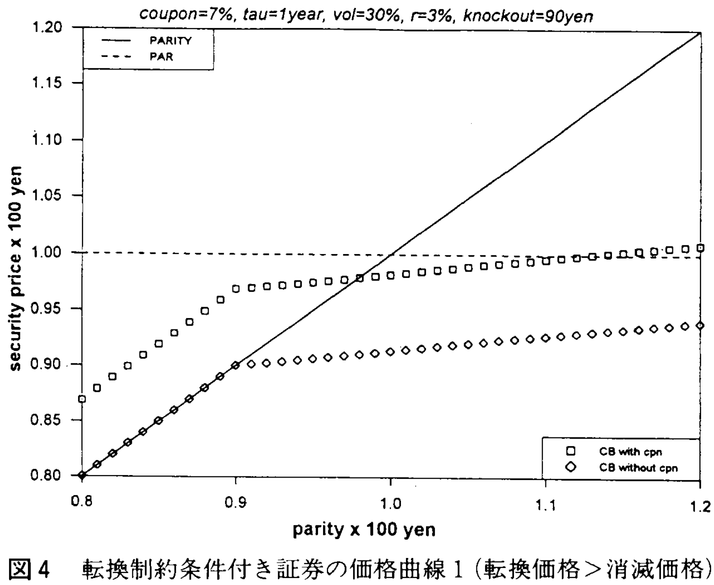

図4　転換制約条件付き証券の価格曲線1（転換価格＞消滅価格）

$$
\begin{aligned}
&= e^{-r\tau}\int_q^{\infty}(b(T)-x(\tau))f(x(\tau),\ \tau\ ;\ x,0)\,dx(\tau) \\
&= -[xN(d_1)-b(T)e^{-r\tau}N(d_2)] \\
&\quad +\left(\frac{q}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma_2}}\left[qN(d_3)-\frac{xb(T)}{q}e^{-r\tau}N(d_4)\right] \qquad (32)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&d_1 \equiv \{\ln[x/b(T)]+(r+1/2\,\sigma^2)\tau\}/\sigma\sqrt{\tau} \\
&d_3 \equiv \{\ln[q^2/xb(T)]+(r+1/2\,\sigma^2)\tau\}/\sigma\sqrt{\tau} \qquad (33) \\
&d_2 \equiv d_1-\sigma\sqrt{\tau},\quad d_4 \equiv d_3-\sigma\sqrt{\tau}
\end{aligned}
$$

これが内蔵されたオプションの評価式である．証券はもともと株式のロング・ポジションを持っていると解釈されているので内蔵オプションとの合成関数 C，

$$
\begin{aligned}
&C(x,\tau,\sigma,r\ ;\ q,b(T))= \\
&\quad x+C_q(x,\tau,\sigma,r\ ;\ q,b(T))+\mathrm{coupon}(\tau) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

が求める証券の評価式である．ここで，$\mathrm{coupon}(\tau)$は発行されたクーポンの再投資価値を示す．

上記の式の中に出てくる変数は，転換価格，したがって社債額面で割って規格化されていることに気をつけたい．株価を横軸にとり，クーポン年7％，償還期間1年，リスクフリー・レート3％，ボラティリティ30％の場合の価格曲線を図4に示す．図にはクーポンがある場合と，クーポンを控除した場合の2通りの価格が描かれている．もう1つ，転換価格を下げ，極端なケースとして転換価格=消滅株価としたら，どんなことが言えるかを示したのが，図5である．転換価格を除いて，条件は図4と同一である．この証券の価値の最大は，消滅価格=転換株価で達成される．2つの図は一方が消滅株価を境に単調増加，もう一方が単調減少で，相異なる姿を示しているように見える．これは，この証券のクーポンを除いた本源価値が決して株式価値を超えられないことと，内在オプション価値(義務でかつ負値)が消滅株価の上昇とともに増加することとの合成の効果である．また，クーポンの再投資価値がこの証券の株式価値を超えるプレミアムをもたらす源泉であることも興味深い．

13. 終わりに

ワラントは一時の勢いを失い，最近では個別株式オプションの上場についての期待の方が大きくなってきてはいるが，長期的性格や投資対象としての魅力にはまだまだ捨て難いものがある．転換社債は堅調で，複合証券としての特徴がファイナンス手段としても，投資対象としても株式・債券に対抗する第3極の地位は今後も不動であろう．特に新しい契約条項が付加された転換社債は学問の対象としても魅力的で，株式・債券・オプションすべての知識をフル動員して研究に望むべき証券であろう．また，近年話題となっているリスク管理上でも，我が国企業ではこれらの証券を無視できないほどのポジションをかかえているはずであるから，問題解決にそれなりの数の担当者や研究ウェイトを振り向けるべきであろう．世界に冠たる市場を持つ我が国の研究者から，米国の真似ではない，独自の研究成果が現れることを密かに期待する．

参考文献

[1] 池田昌幸(1990)「停止条件付きおよび開始条件付きオプション契約の評価」, Discussion Paper No.19, 東北大学経済学部.

[2] 国村道雄・飯原慶雄(1989)『株式市場とオプション取引』中央経済社.

[3] 刈屋武昭(1995)『転換社債価格 CSM モデルと TDM モデル』東京クオンツ・セミナー資料.

[4] 河内規弥(1995)「オプション理論による転換社債モデルの実証研究」『日本金融・証券計量・工学学会誌』東洋経済新報社.

[5] 髙橋正文・木内伸和・鈴木美和他(1990)「転換社債価格評価モデル」『投資工学』日興リサーチセンター投資工学研究所.

[6] 髙橋正文・三宅一弘(1990)『エクスチェンジ・オプション：その応用と発展性』NRC レポート.

[7] 髙橋正文(1995)『拡張 Samuelson モデルと最適転換株価』日本経営財務研究双書第17巻（近刊).

[8] 渡辺信一(1990)『ワラント投資の基礎と戦略』東洋経済新報社.

[9] Barone-Adesi and Whaley(1987), “Efficient Ana-

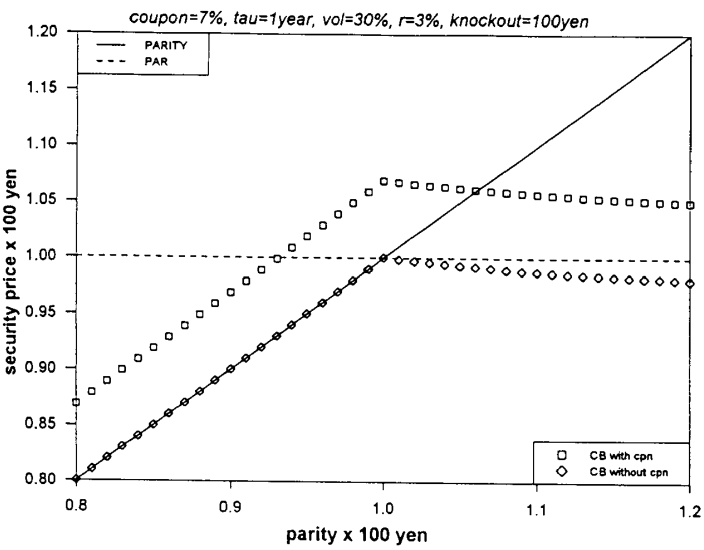

図5　転換制約条件付き証券の価格曲線2（転換価格＝消滅価格）

lytic Approximation of American Option Values," *The Journal of Finance*, Vol.42 , No.2, pp. 301-320.

[10] Bierman,Harold,Jr.(1973), "The Cost of Warrant," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June pp. 499-503.

[11] Black,F.and Myron Scholes(1973), "The Price of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, May-June, pp. 637-659.

[12] Brennan M.J.and E.Schwartz(1980), "Analysing Convertible Bonds," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 15, No. 4, November, pp. 907-929.

[13] Brennan M. J.and E.Schwartz(1977), "Convertible Bonds : Valuation and Optimal Strategies for Call and Conversion," *The Journal of Finance*, Vol. 32, No. 5, December, pp. 1699-1715.

[14] Chen, Andrew H.Y.(1970), "A Model of Warrant Pricing in a Dynamic Market," *The Journal of Finance*, Vol.25, pp. 1041-1059.

[15] Emanuel,David C.(1983), "Warrant Valuation and Exercise Strategy," *Journal of Financial Economics*, Vol. 12, pp. 211-235.

[16] Galai,Dan and Meir I.Schneller(1978), "Pricing of Warrants and the Value of the Firm," *The Journal of Finance*, Vol. 33, pp. 1333-1342.

[17] Ingersoll,J.(1977), "A Contingent-Claim Valuation of Convertible Securities," *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, pp. 289.

[18] Kassouf, Sheen, T.(1968), "Warrant Price Behavior 1945 to 1964," *Financial Analysts Journal*, January-February, pp. 123-126.

[19] Leabo,Dick A. and Richard J.Rogalski(1975), "Warrant Price Movement and the Efficient Market Model," *The Journal of Finance*, Vol. 30, pp. 163-177.

[20] Liebowitz, M. L.(1974), "Convertible Securities," *Financial Analysts Journal*, Nov-Dec.

[21] Margrave W.(1978), "The Value of an Option to Exchange One Asset to Another," *The Journal of Finance*, Vol. 33, pp. 177-186.

[22] Marsh,T(1995), "Why Doesn't the Black-Scholes Model Fit Japanese Warrants and Convertible Bonds?," *Japanese Journal of Financial Economics*, Vol. 1, No. 1, pp. 33-65.

[23] Miller,Jerry D.(1971), "Effects of Longevity on Values of Stock Purchase Warrants," *Financial Analysts Journal*, November-December, pp. 78-85.

[24] Noreen, Eric and Mark Wolfson(1981), "Equilibrium Warrant Pricing Models and Accounting for Executive Stock Option," *Journal of Accounting Research*, Vol. 19, pp. 384-398.

[25] Rogalski,Richard J.(1977), "Trading in Warrants by Mechanical Systems," *The Journal of Finance*, Vol. 32, pp. 87-101.

[26] Samuelson, P. A.(1965), "Rational Theory of Warrant Pricing," with Appendix : McKean, H. P. Jr., "A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem of Mathematical Economics," *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2, pp. 13-39.

[27] Samuelson,P.A.and Robert Merton(1969), "A Complete Model of Warrant Pricing that Maximizes Utility," *Industrial Management Review*, Vol. 10, pp. 17-46.

[28] Schwartz,Eduardo S.(1977), "The Valuation of Warrants : Implementing a New Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, pp. 79-93.

[29] Shelton, John P.(1967), "The Relation of the Price of a Warrant to the Price of its Associated Stock," *Financial Analysts Journal*, May-June, pp. 143-151.

[30] Takahashi,M.(1995) "An Extension of Samuelson's Warrant Valuation Model and its Application to Japanese Data," *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol. 2, No. 2, pp. 155-168.