モンテカルロ法によるオプション価格決定

森平　爽一郎

1．はじめに

モンテカルロ法は，オペレーションズ・リサーチの分野では，すでに確立した研究分野であり，実務においても数理計画法とともにもっともよく使われている手法である．このモンテカルロ法をファイナンス理論の核心をなす派生証券の価格決定に用いいようとする試みが最近盛んに行われるようになってきた．

ハードウエア上の急速な進歩と派生証券の重要性の高まりに応じて，モンテカルロ法は「コンピュテーショナル（計算）ファイナンス」という新しいファンナンス研究の分野で必須の手法となりつつある[1]．

2．オプション価格決定の考え方とモンテカルロ法

オプションの価格がどう決定されるかという「オプション価格決定の理論」はむずかしいというのが多くの人の印象である．しかし，その基本はきわめて簡単である．

ヨーロピアンのコール・オプションを考えてみよう．コールオプションを持っている投資家は，次のような時に利益を得られる．つまり，オプション契約の対象になる資産の将来価格，たとえば将来の株式価格が，あらかじめ決められた「垣根＝ハードル」である行使価格を越えたときに，越えた分が利益となる．このような契約の価値＝価格は幾らになるだろうかというのが，オプション価格決定理論の基本である．

問題なのは，将来の価格が不確実であるため，オプション契約を結んだ投資家が幾らの将来利益が得られるのか，わからないことである．このため，将来利益の期待値を考え，それを現時点での価値，現在価値に引き戻したものをもって，オプションの価値，すなわち価格とするのである．そのことを数式で表すと，

$$C_0 = e^{-r_f T} E[\tilde{C}_T] \tag{2.1}$$

$$= e^{-r_f T} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Max}[\tilde{S}_T - K, 0] f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T) \tag{2.2}$$

$$= e^{-r_f T} \int_{K}^{+\infty} \tilde{S}_T f(\tilde{S}_T) d(\tilde{S}_T) \tag{2.3}$$

となる．式(2.1)は，現在の，つまり時点ゼロのコールオプション価格は，満期(T)のオプションからのペイオフ($\tilde{C}_T$)の期待値をその間の金利で現在価値に割り引いたものに等しいことを示している．そのことは，式(2.2)に示されているように，現時点のオプション価格は，満期の株式価格($\tilde{S}_T$)が，ハードルである行使価格(K)を「越えたとき」の分(Max$[\tilde{S}_T - K, 0]$)の「期待値」を満期までの金利分($r_f \cdot T$)で現在価値に割り引いて($e^{-(\cdot)}$)求められることを示している．ここで，期待値を計算するということは，ある特定の株価の値($\tilde{S}_T$)を，それが実現するであろう可能性を表す将来株価の確率密度関数値($f(\tilde{S}_T)$)で「加重」して積分（合計）したものである，と直感的に解釈できよう．

式(2.2)あるいは式(2.3)を，直接評価してその解析（閉じた）解を求めることができる場合もある．しかし，密度関数が複雑な時や(2.2)のようにオプションからのペイオフが，(Max$[\tilde{S}_T - K, 0]$)のように簡単でないときは，積分を評価することはきわめて困難である．こうしたことは次のような場合生じる．たとえば，満期日のペイオフがそれ以前の株価の平均値にもとづいて計算されているような特殊なオプションの場合や，株価の分布関数として対数正規分布といった積分しやすいものでなく過去の株価の経験分布を想定する場合，さらにはオプションの対象となる資産の数が多く，多重積積分が必要になる場合などである．

その場合，積分を数値的に評価しようとしたり，式

もりだいら　そういちろう　慶應義塾大学総合政策学部
〒252 藤沢市遠藤5322

[1] 以下の内容は，コンピュテーショナル・ファイナンスのうちでモンテカルロ法に中心をおいて説明するが，それを含めてコンピュテーショナル・ファイナンスのより深い議論については，森平＝小島[1]を参照のこと．

(2.2)の期待値をとる演算を，N回のシミュレーションにもとづくN個のペイオフの「平均値」で近似しようとする方法:モンテカルロ法が利用される．つまり，

$$C_0 \approx e^{-r_f T} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (\mathrm{Max}\ [\tilde{S}_{Tj} - K, 0]) \tag{2.4}$$

と考えるわけである．

3．モンテカルロ法の手続き

モンテカルロ法を用いてオプション価格決定を行うためには次のような6つの段階をとる．上のユーロピアン・コールオプションの例を用いて考えてみよう．

（ステップ1） 株価の確率過程を考える：満期の株価がどのように生成されるかを考える．たとえばオプション価格決定モデルでもっとも有名なブラック=ショールズの世界では，微小期間(dt)の株価の変化(dS_t)は，瞬間的な傾向(μ)，と変動性(σ)を有する幾何ブラウニアン過程に従うと考える．つまり，

$$d\tilde{S}_t = \mu S dt + \sigma S d\tilde{W}_t \tag{3.1}$$

ここで，$d\tilde{W}_t$は増分ブラウニアンである．

（ステップ2） リスク中立的な株価の生成過程：オプションからのペイオフの「期待値」を求める場合，実は単純にその「平均値」を計算することはできない．簡単に言うと，株価変動は，投資家がオプション取引に当たって，(i)リスクをかけることなく，かつ(ii)自分のポケットからお金を出すことなく，利益を得ることができ「ない」，という「無リスク裁定利益取引」が不可能であるという条件を満たす必要がある．このような株価の変化は実際の株価の変化とは異なる「リスク中立過程」と呼ばれ，上の式の場合には右辺第1項の傾向(ドリフト)部分を固定的な金利で置き換えて，

$$d\tilde{S}_t = r_f S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t \tag{3.2}$$

となる．

（ステップ3） 離散近似：上の式を連続型から，コンピュータで計算するために離散化する．つまり，確率「微分」方程式を確率「差分」方程式で近似する．もっとも簡単な離散化は，満期までの期間をN等分して，時間刻みΔtとし，それに応じて株価の離散的な動きを記述する[2]．

$$dt \approx \Delta t = T/N \tag{3.3}$$

$$dS_t \approx \Delta S_t = S_{t+\Delta t} - S_t \tag{3.4}$$

$$d\tilde{W}_t \approx \tilde{\varepsilon}\sqrt{\Delta t} \tag{3.5}$$

ここで，株価の不確実性をあらわすブラウニアン運動を，平均ゼロ，分散1の標準正規乱数($\tilde{\varepsilon}$)と時間刻みの平方根($\sqrt{\Delta t}$)の積で表す．

（ステップ4） 確率差分方程式を解く：株価の初期値S_0が与えられたとすると，それから出発して，式(3.3)から式(3.3)によって

$$S_{tj} = S_{t-1,j} + r_f S_{t-1,j} \Delta_t + \sigma S_{t-1,j} \tilde{\varepsilon} \sqrt{\Delta t} \tag{3.6}$$

第j回目のシミュレーションでの1，2，…，T期の株価，S_{1j}，S_{2j}，…，S_{Tj}を計算することができる．

これが1回のシミュレーションにもとづく，1つの株価の「実現」経路(パス)である．満期日でのみ権利が行使できるユーロピアン・オプションでは，満期日での株価のみが必要であるにすぎないが，経路従属型の多くのエキゾチック・オプションでは，満期以前の株価を利用する．たとえば，平均オプションでは，満期前のある期間の株価の平均値をもってして満期日の株価とみなす．ルックバック(見返り)コールオプションでは，満期以前での最安値の株価をもってして，満期日の株価とみなす．モンテカルロ法では単にそうした操作をするだけでよい．

（ステップ5） オプションペイオフの計算：満期の株価(S_{Tj}から行使価格を差し引いて，それとゼロの大きい方をオプションからの利益，ペイオフとする．つまり，満期の株価が行使価格より大きいときだけ，その差をペイオフとする．

（ステップ6） オプション価格：期待(平均)ペイオフの計算：ステップ4と5を多数回繰り返す．いまN回のシミュレーションが行われたとしよう．そうすると，期待ペイオフはその平均値で求まる．つまり$(1/N)\Sigma_j \mathrm{Max}\ [S_{Tj} - K, 0]$を計算する．シミュレーション回数が十分に大きければ，それは真の値に等しくなっているはずである．その程度は期待ペイオフの「標準誤差」$s/\sqrt{N}$からα%の信頼限界計算して確認できる．ただしここで，変数sはシミュレーションで計算されたペイオフの標準偏差である．シミュレーション回数は，この信頼限界が十分に小さくなるまで行うべきものである．現在時点のオプション価格は，こうして求めた期待オプションペイオフを現在価値に引き戻して，式(2.4)として求めることができる．

図(1)は，上のような単純なモンテカルロ・シミュレーションを100万回行ったときのコールオプションの

[2] この段階で連続過程を離散化することからの誤差が生じることに注意しなければならない．より誤差の少ない近似公式が数多く提唱されている．例えば，Kloeden=Platen [4] を参照のこと．

結果を示している[3].

図で横軸と平行な直線がブラック=ショールズモデルで計算した真の値(9.39円)であり，そのまわりを変動している実線がシミュレーション回数に応じたコールオプション価格である．その上下区間は95パーセントの信頼区間を表している．100万のシミュレーションを行っても信頼限界が十分小さくなったとは言えないことに注意しなければならない．つまり，単純なモンテカルロ法は収束がきわめて遅いという問題点がある．

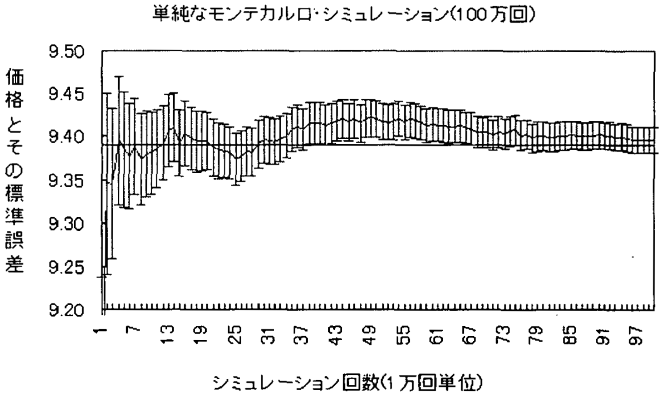

図1　単純なモンテカルロ法によるコールオプション価格の推定：真のオプション価格が9.39円の時．現在の株価＝100円，行使価格＝100円，金利＝4％，ボラタリティー＝30％，時間刻み＝1日＝(1/250)年

4．モンテカルロ法の利点と問題点

以上の説明からも理解できるように，モンテカルロ法は，二項分布モデルや差分近似，あるいは解析解を求める方法と比べて，次のような利点と問題点がある．

4.1　モンテカルロ法の利点

モデリング柔軟性　オプションの評価に当たって，資産価格の不確実性を表す確率密度関数($f(\cdot)$)の形が複雑であったり，満期の利得($\tilde{C}$)の形が，式(2.2)のように簡単な形にならないときでも，モンテカルロ法では期待値を評価するための積分は単に平均値の計算に還元できるから，解析解を求めるにあたっての困難性は考慮しなくてもよい．たとえば，算術平均オプションは，満期のオプションペイオフが，満期以前の株価の算術平均から行使価格を引いたものになる．たとえ，個々の資産価格が対数正規分布すると仮定できても，対数正規する確率変数の和，したがって平均は対数正規分布するとは限らない．そのような場合でもモンテカルロ法では問題ない．また，最近多くのエキゾチック・オプションと呼ばれる満期のペイオフが非常に複雑なオプションが活発に取り引きされている．こうしたときには，モンテカルロ法が必要になる[4].

多資産オプションの評価式(2.2)において，もし資産の数が2つ以上ある時には，平均値を求める操作を行っているわけであるから，多重積分を行わなければならない．モンテカルロ法以外の方法では，そのための計算量が資産の数に「幾何級数的」に比例して増加する．これに対しモンテカルロ法では計算量は資産の数に「比例」して線形に増加するだけである．事実，互いに相関を持った資産の数が2つ以上になると，他の数値解析法を適用することは，計算アルゴリズムが複雑になることともあいまって，ほとんど不可能である．現在の所，多資産オプションの評価はモンテカルロ法が唯一の方法であると言っても良い．

たとえば，幾つかの資産からなるバスケットあるいは指数を対象にするオプションの評価や，金利の期間構造のマルチファクターモデルを仮定する金利オプションの評価にあたって，特にモンテカルロ法は重要である．

4.2　モンテカルロ法の問題点

このような利点に対し，モンテカルロ法は，(1)真の価格への収束が遅い，したがって多数の繰り返し計算が必要になる．(2)アメリカン・オプションの評価が「不可能」である．という2つの批判がある．図(1)は第3節で示された方法で100万回のシミュレーションを行った結果であった．真の解が9.39円であるのに対しシミュレーションによる価格の収束がきわめて遅く，しかもその95％信頼限界の幅が回数を増やしても2.5銭程度あることが見て取れる．しかしこの問題は，最近における高速のコンピュータの利用と，次に述べるような分散減少法や準乱数をあわせ用いることによって解決できる．

---

[3] この場合，実際は式(3.2)にもとづいて満期の株価($S(T)$)を求めたわけではない．株価が式(3.2)のように幾何ブラウニアン過程に従うときは，この確率微分方程式の解は，$S_{Tj}=S_0\exp((r_f-\sigma^2/2)(T)+\sigma\epsilon\sqrt{T})$となる．このようにする方が離散化の誤差が少なくなる．

[4] この点は，モンテカルロ法をオプション理論の教育や非専門家に理解させるための方法としても重要であることを示唆している．モンテカルロ法によるオプション評価にあたっては，対象が複雑なエキゾチック・オプションであっても，アルゴリズムが簡単であることによりプログラミングがきわめて簡単である．また，モンテカルロ法によって得られた多数回の株価のパスとそれに伴うオプションペイオフをグラフ化できることも理解を容易する．

後者の問題は，モンテカルロ法が前向き解法であることからの帰結である[5]．アメリカン・オプションを評価するためには，満期以前のすべての時点で，(i)即時に権利行使したときの利益と，(ii)それ以降に行使した時の期待ペイオフを比較する必要がある．モンテカルロ法では，ある時点で，それ以降での期待ペイオフを知ることは非常に困難である．なぜならば，そのためには，例えば時点ゼロからある特定の時点($t_1>0$)まで資産価格が進んできたという条件のもとで，時点t_1以降における株価がどうなるかを考えなければならない．時点t_1までのパスの個数がn個あり，その1つ1つに対しm個のパスを発生するモンテカルロ・シミュレーションを，しかも満期以前のすべての時点で試みることは，計算量が莫大になり，ほとんど不可能である．

しかし，最近この問題に対して，さまざまな解決方法が提唱されている．アメリカン・オプションのモンテカルロ法による評価は，可能性というよりも実用の域に入ったと言ってもよいであろう[6]．

5．分散減少法

モンテカルロ法における真の解への収束が遅いという点に対しては，さまざまなタイプの分散減少法(Variance Reduction)が提唱されている．それらの多くはまたファイナンス理論におけるリスク管理法と密接な関係がある．そのうちの代表的な3つの方法を取り上げてみよう．

5.1 対照変量法

対照変量法とは，式(3.2)と式(3.5)で株価のパスを計算する場合，ある標準正規乱数と，その値に対し符号を変えたもう1つの数とをもって2つの株価のパスを得，さらにそれに対応するオプション価格を計算する．そしてこの2つのオプション価格の平均値を計算することにより，誤差を少なくさせようとするものである．

これは，ポートフォリオ理論でいう「分散投資によるリスク減少」の原理と同じ考え方である．互いに負の相関を持つ2つの系列を平均するポートフォリオをつくることによって，リスクを減らそうとすることができる．また，この方法は標準正規分布が本来ゼロを中心にして対称な分布であることを保証するようなシミュレーション方法であるとも考えられる．

この方法によるコールオプションの評価が，図(2)に示されている．図(1)と比べると，こうした単純な方法にもかかわらず，信頼限界の幅が狭まっていることと，比較的早く真の値に集束していることがわかる．

5.2 層化抽出法

層化抽出法では，分布をより多くの「層」に分割してその各々の層からの標本抽出，つまり乱数発生を行う．単純な乱数発生では，分布のある特定の部分に偏ってサンプリングが行われる可能性がある．層化抽出法はこの偏りを避けるためのものである．

5.3 制御変量法

いまモンテカルロ法をオプションの真の価値がわかっているもの，たとえばブラック＝ショールズモデルに対して適用すると，モンテカルロ法の誤差，言い替えれば乱数発生の偏りがどのくらいあるかを評価できる．次に，真の価格がわかっていないけれども，ブラック＝ショールズモデルとよく似通っているオプションを(同じ乱数系列を用いて)モンテカルロ法で評価することを考えてみよう．そのときに，ブラック＝ショールズ・モデルにモンテカルロ法を適用して得られた誤差を毎回のランから差し引けば，その時の誤差は打ち消されるであろう．なぜならば，2つのオプションはその構造がよく似通っているわけであるから，モンテカルロ法による互いの誤差も似通っていると予想できるからである．このときのブラック=ショールズモデルを用いて計算された結果を制御変量と呼ぶ．

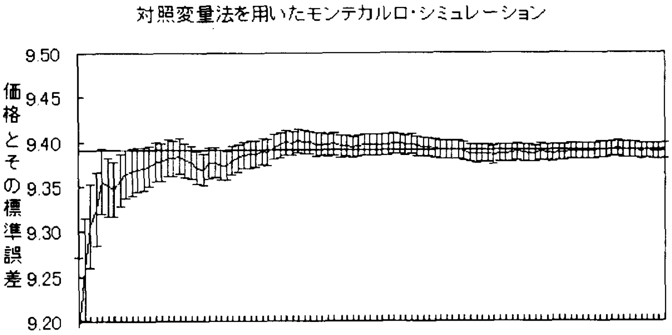

図2 対照変量法を用いたモンテカルロ法によるコールオプション価格の推定：真のオプション価格が9.39円の時

---

[5] 前節のステップ4で示されているように，毎期の株価は時点ゼロの初期値($S-0$)から出発し，順次式(3.6)の確率差分方程式を解くことによって得られる．つまり前向きに株価のパスを求めていく．

[6] より詳しくは，森平＝小島［1］を参照のこと．

5.4 その他の方法

そのほかに，モンテカルロ法による誤差を減少させるための方法は幾つもの方法が考えられている．例えば，制御変数法を拡張した「回帰分析法」がよく用いられている．

また，モンテカルロ法では母集団分布として標準正規分布を仮定する．しかし，実際にはそれからの抽出された標本は標準正規分布するとは限らない．したがって，K回目までの乱数発生で得られた標本分布の平均，分散，歪度などが母集団のそれらに等しくなるように乱数そのものを「修正」するという，モーメント適合法(Moments Matching)がある．例えば，標本平均をゼロ，その分散を1にしたければ，得られた標本正規乱数から標本平均値を差引，さらに結果を標本標準偏差で割って，新しい正規乱数を生成し，株価のパスを計算するために用いる．このためには，発生した乱数をすべて記憶しておかなければならないという問題は生ずるが，母集団分布の平均(ゼロ)と標準偏差(1)が標本分布のそれとが必ず一致するという利点がある．

さらにはインポータンス標本抽出法などさまざまな方法が考えられている．実際にはこれらを組み合わせたり，個々のオプションに特有な問題に沿った形でこれら分散減少法を改良したものが用いられている[7]．

6．数値積分と「準」乱数の利用

二項分布，偏微分方程式の差分近似，モンテカルロ法と並んでよく用いられる手法が，数値積分である．しかし，これは実際にはモンテカルロ法の特殊な場合であると考えることができる．その点と関連して，最近注目されている「準」乱数を用いた方法を考えてみよう．

6.1 層化抽出法の極限としての数値積分

層化抽出法は，分布をいくつかの層にわけ，それぞれの層から乱数を取り出すことによって標本抽出誤差を減らそうとするものであった．層の数を非常に多くして，つまり1つ1つの層の幅を非常に小さくし，それぞれの層から1つの乱数を抽出して，式(2.4)のオプション価格を計算したらどのようになるであろうか？非常に狭い層から1つの乱数を取り出すわけであるから，もはや確定的なサンプリングを行うとみなすことができよう．その結果は数値積分を行うことに等しくなる．

他の言い方をすると，この方法で式(2.2)で，確率変数の取り得る値とそれに対応する密度関数値を知ることができれば，積分計算を足し算に替えて，オプション価値を計算すれば良い．それが数値積分に他ならない．

たとえば，対数正規分布する満期の株価は，標準正規乱数が *varepsilon*$_j$という値を取ったときに，次のように計算できる．

$$S_{Tj}=S_0\exp((r_f-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}e_j) \qquad (6.1)$$

したがって，式(2.3)で，密度関数を標準正規分布に置き換え，*varepsilon*$_j$のマイナス無限大からプラス無限大の範囲で積分計算すればよい．具体的には，*varepsilon*$_j$の取り得る範囲をプラス・マイナス3シグマの間でN等分し，それに対応する株価とオプション・ペイオフを計算し，その平均値を計算すればよい．分割数(N)が大きくなればなるほど近似の程度はよくなるであろう．

6.2 「準」乱数

数値積分の問題点は，あらかじめ分割数(N)を決めておかなければならないことである．これに対し，モンテカルロ法では試行回数を，毎回の試行で得られる標準誤差が十分に小さくなったときに，はじめて打ち切ることができるという利点がある．

数値積分のよさと，この意味でのモンテカルロ法の利点を併せて実現しようとしたのが，準乱数(Quasi Random Numbers)の利用である[8]．準乱数は実際は乱数ではないことに注意しなければならない．N個の準乱数が得られたときに，それらは常にゼロと1のあいだで“even”に「規則的に」散らばっている．例えば，最初の5個のSobolによる準乱数は，ゼロと1の間で(0.5, 0.25, 0.75, 0.375, 0.875)の順番で確定的に発生する．

モンテカルロ法では，誤差は$1/\sqrt{N}$に比例していたのに対し，準乱数ではわずかに$1/N$になる．したがって，準乱数を用いると，シミュレーション回数が大幅に少なくてすむ．図(3)は，Sobolによる準乱数を用い

[7] たとえば，[2]，[3] で提唱された「マーチンゲール分散減少法」は回帰分析法をオプション理論でいうマーチンゲール特性との関係で修正したものと考えることができる．

[8] 準乱数を用いたオプション評価については，Paskov=Traub [6]，Paskov [5] が参考になる．

たときのオプション価格の収束状況を，真の値との相対誤差の形で示したものである．ほぼ最初の数万回の試行で，誤差率が0.05パーセント程度になり，ほぼ真の値に収束していることがわかる．準乱数は，しかしながら，多次元に展開したとき，超平面で一様に分布している数になっているかどうか保証できないという問題がある．

7．おわりに

モンテカルロ法は，今やORのあらゆる分野で標準的な手法となっている．しかしそれをオプション価格決定にあたって利用しようとする試みが盛んになったのはごく最近のことである．モンテカルロ法は，オプション価格の決定において非常に柔軟，かつ理解と適用が容易である数値解法である．それは単に価格評価のためでなく，リスク指標の計算とそれにもとづくヘッジ戦略，さらには他のファイナンス問題において大きな力となろう．

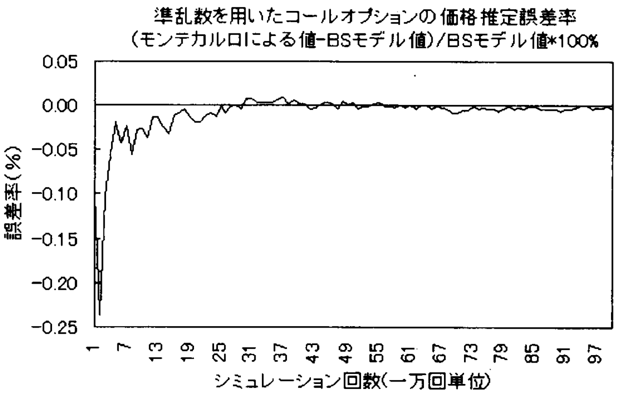

図3　準乱数を用いたときのコールオプション価格：真のオプション価格が9.39円の時

参考文献

[1] 森平爽一郎，小島裕，『コンピュテーショナル・ファイナンス』，「ファイナンス講座」，朝倉書店，1996年秋刊行予定．

[2] Clewlow Les and Andrew Carverhill., "On the Simulation of Contingent Claims," *Journal of Derivatives*, 1994, 66-74.

[3] Clewlow Les and Andrew Carverhill., "Quicker on the Curves," *Risk*, 7(5), 1994.

[4] Kloeden Peter E., and Eckhard Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, 1992.

[5] Paskov Spassimir H., "Computing High Dimensional Integrals with Applications to Finance," *Working paper*, Columbia Univ., Department of Computer Science, 1994.

[6] Paskov Spassimir H. and Joseph F. Traub, "Faster Valuations of Financial Derivatives," *Journal of Portfolio Management*, (Fall, 19940, 113-120.