オプション評価の考え方

飯原　慶雄

1．オプションとは

オプションとは，ある資産(株式，債券，通貨など)をあらかじめ決めた価格で購入したり，売却したりする権利であるといわれています．権利だけで，購入したり，売却したりする義務がありませんから，権利を持っている人はその権利を行使するのが有利であるときだけ権利を行使し，権利を行使するのが不利なときには権利を放棄します．したがって，このような権利をただで手に入れることができるならば，このような権利を持つ人は絶対に有利で，この権利を行使される相手方は絶対に不利になります．そこで，このような権利を持つ人は相手方にこの権利の代価を支払うことになります．この代価はオプション価格あるいはオプション・プレミアムと呼ばれます．以下では，このオプション価格がどのように決まるかを見てみます．オプションに関連したいくつかの用語について最初に説明しておきます．権利を持つ人をオプションの保有者あるいは買い手，その相手となる人をオプションのライター(writer)あるいは売り手といいます．オプションの満期日までの期間中いつでも権利が行使できるタイプをアメリカンと呼び，満期日だけに権利が行使できるものをヨーロピアンと呼びます．資産を購入する権利を持つオプションをコール・オプション，売却する権利の方をプット・オプションと呼びます．またあらかじめ決められている購入価格あるいは売却価格をオプションの行使価格といいます．

欧米では個別の株式のオプションが取引所で広く取引されていますが，わが国では，株式については株式指数オプションの取引は行われていますが，個別の株式についてのオプション取引は取引所では行われていません．株式指数の場合は株式指数そのものの受け渡しはできませんので，権利行使時の株式指数と行使価格の差額の受け渡しが行われます．実際に資産の受け渡しが可能なときでも権利行使時の資産価格と行使価格との差額の受け払いで済ますことも少なくありません．株式の他に債券についてのオプションの取引や，外国為替についてのオプション取引が盛んに行われています．コール・オプションで権利を行使することは行使価格に相当する金額を犠牲にして資産を獲得することであり，プット・オプションは逆に資産を犠牲にして行使価格に相当する金額を獲得することになります．そして，このように，将来，獲得できるものと犠牲にしなければならないものを比較して獲得できるものの価値が大であるときだけそれを獲得するというような状況は，企業ではしばしば現れます．設備の拡張や既存の設備の廃棄など，これまで決定木(decision tree)で分析してきたものが，こうした可能性をオプションとして評価することにより，正しい投資決定を行うことができるようになりました．

2．裁定取引と裁定価格

現在，オプション価格の理論として支配的な考え方は，同じ利得をもたらす二つの金融資産の価格は同じでなければならないという考え方です．これは，基本的には同じ品物は同じ価格で売買されるという一物一価の法則と同じ考え方ですが，オプションの場合はいくつかの資産を組み合わせて他の資産と同一の利得を創りだすので，単純な一物一価の法則よりもう少し複雑であり，しかも，その組合せを絶えず変化させていかなければならないのでさらに複雑になっています．同じ品物が異なる価格で売買されているときには，低い価格でその品物を買って高い価格で売ることにより二つの価格の差額を儲けることができます．このような利益を裁定利益と呼び，このような裁定利益が生ま

いいはら　よしお　南山大学
〒466 名古屋市昭和区山里町 18

れないような価格を無裁定条件の下での価格と呼びます．同じ品物の場合は，その品物の価格が等しければ裁定利益は生まれません．したがって，同じ品物の価格が等しいということが無裁定条件の下での価格の性質ということになります．いくつかの資産を組み合わせて得られる利得が他の資産の利得に等しいならば，組み合わせた資産を購入する費用ともう一方の資産の価格が等しいというのが無裁定条件の下での価格の特性となります．したがって，無裁定条件の下での価格はいくつかの資産価格の間に成立しなければならない関係を示すものとなります．以下で説明する株式オプションの場合も株式と債券とオプションの間の無裁定条件を満足する関係式がオプション評価式と呼ばれます．

無裁定条件の下でのオプション価格を求める前に，無裁定条件の下での価格に関心がもたれるようになった背景について考えておくことにします．オプションは金融資産に限らず商品取引やそれ以外の分野でも取引が行われていますが，最近のオプション理論の展開は株式，債券，通貨，金利など金融資産に関連したものが圧倒的に多いといってよいでしょう．そこで，金融資産の特質と金融資産が取引される金融市場の最近の変化について見てみることにします．金融資産は経済主体（企業，政府，個人など）の間の法的契約関係を表すものであって，一般に，将来ある金額（確定した金額とは限らないが）の受け払いを約束するものです．その約束の仕方は，株式や債券など取引所で取引されるものや，広く一般の人々を対象に売買されるものについては，ある程度決まった形がありますが，個別の取引の場合には当事者が合意すれば自由に契約の形を決めることができます．また，先物やオプションのような金融派生商品の多くは，将来，基礎資産の受け渡しを行わないで，差額で決済しますから，基礎資産を準備しなくても，契約が完全に履行できるならばどんな多額の取引でも実行可能となります．

金融資産が取引される金融市場は最近大きく変化してきています．そうした変化の第1に国際化があげられます．日本の企業が海外で資金を調達するのは常識となり，外国の企業も日本で資金調達を行うようになってきました．外国人投資家の動向が日本の株式市場の動きを支配しているという人さえいます．第2に規制緩和，自由化の動きが進んできました．海外に比べて日本の金融制度は依然として規制が強いといわれていますが，規制緩和の世界的な動きの中で孤立することは金融の空洞化を招くことになります．第3に通信技術，コンピュータ技術を中心とする技術革新が大幅に進んでいます．世界中の情報がリアル・タイムで得られ，それによって直ちに注文をだすことができるようになりました．また，複雑な計算を実行し将来の変動の効果を予測することも可能になってきています．第4に金融取引で銀行，生命保険，年金基金などの機関投資家の比重が増加して個人投資家の比重は著しく低下してきています．

こうした金融資産の特質と金融市場の最近の動きは金融資産の価格が裁定利益を生み出すようなものであればこのような機会を利用して利益を得ようとする動きを活発にします．金融市場の国際化は各国の金融市場を孤立したものでなく相互に結び合わされた一つの統合された世界市場にする方向に進んできています．強力な情報通信システムを有する機関投資家は世界中に裁定機会を求め，裁定機会を利用して新しい金融商品を創りだしています．このような裁定利益獲得のための競争は裁定利益がいつまでも存続することを不可能にし，各種の金融商品の価格を無裁定条件の下での価格に近づけます．また，裁定機会を利用するためにも無裁定条件の下での価格を計算することが必要となります．これらが裁定という考え方を基本にしてオプション評価を行う背景であるといって良いでしょう．

3．2項モデル

無裁定条件の下での価格を裁定価格と呼ぶことにします．裁定価格について考えるために簡単な例について考えてみます．いま，ある株式の価格が1,000円で1期後の株価が1,200円か800円のいずれかになるとします(この非現実的な仮定は後で修正します)．1期後に満期となる行使価格1,000円のコール・オプションは1期後の株価が1,200円であれば200円の価値を持ち，株価が800円になればその価値はゼロになります．株式の他に国債のように期末に受け取る金額が確定している債券があるものとして，期末に1,000円受け取ることができる債券の現在の価格が900円であるとします(1,000/900=1.1111ですから，利子率は11.11％ということになります)．この場合，債券と株式を適当に組み合わせれば，期末にオプションと同一の金額を受け取ることができます．株式と債券の購入量をそれぞれxとyとすると

$$1,200x+1,000y=200$$
$$800x+1,000y=0$$

を満足するようなxとyがそのような組合せであることが分かります（前の式の左辺が株価が1,200円になったときに得られる金額であり，後の式の左辺が株価が800円になったときの金額です）．xとyを求めると$x=0.5$, $y=-0.4$となりますから，債券を0.4単位空売りし（11.11％で借り入ることができれば360円借り入れ），株式を0.5単位購入すれば，期末に得られる金額は，株価が1,200円になったときには200円になり，株価が800円になったときにはゼロになります．この時に期首に必要な金額は株式の購入金額500円から借入分を差し引いた140円です．140円でコール・オプションを保有したときと同一の金額を得ることができるのですから，オプションの裁定価格は140円ということになります．以上のことを記号を使って表現してみましょう．現在の株価をS，期末の株価を$u \cdot S$と$d \cdot S$，債券の現在の価格を1，1期後の受け取り額をR（利子率に1を加えたもの）とし，株価が$u \cdot S$と$d \cdot S$のときのオプションからの利得をそれぞれC_uとC_dとします（上の例では$C_d=0$ですが，行使価格によってはゼロになるとは限りませんので，C_dで表すことにします）．先の数値例のときと同様にしてオプション価格を求めると

$$C=[C_u(R-d)/(u-d)+C_d(u-R)/(u-d)]/R$$

となります．$u>R>d$とすると（この不等式が成り立たないと株式と債券と売買により裁定利益が発生します），C_uとC_dの係数である$(R-d)/(u-d)$と$(u-R)/(u-d)$はともに正で，両者の和は1になりますから，これを確率と考えれば上の式はオプション価格は期末の期待利得の割り引き値になることを示しています．したがって，これらの確率をπ_uとπ_dで表すと

$$C=(\pi_u C_u+\pi_d C_d)/R$$

となります．

この確率がどんな意味をもつのか考えてみます．期末の状態の個数がn個であるとします．この例では期末の株価は二つの値のどちらかであると仮定しましたので，期末には株価の上昇と株価の下落という二つの状態のどちらかが起きます．期末にある特定の状態が生じたときにだけ1円を受け取ることができる証券を考えます．ここでは，株価が上昇したときに1円受け取る証券と下落したときに1円受け取る証券の二つがこのような証券になります．このようにある状態が起きたときだけに1円を受け取る証券を状態依存証券と呼びます．それぞれの状態の発生確率をp_i，状態依存証券の購入量をx_i，その価格を$q_i(i=1, \cdots, n)$とすると，期末の状態がiであるとx_i円受け取ることになります．その効用を$U(x_i)$で表すことにすると，期末の受け取り額の期待効用は$\Sigma\ p_i U(x_i)$となります．状態依存証券の購入金額($\Sigma\ q_i x_i$)一定という条件の下でこの期待効用を最大にするようなx_iを求めると，状態iでの受け取り額の限界効用$U'(x_i)$がq_i/p_iに比例することが必要であることが分かります．したがって，状態依存証券の価格はその状態の発生確率とそのときの受け取り額の限界効用の積に比例します．他方，株価が上昇したときに1円受け取る証券の価格をq_uとすると，期末の受け取り額から，上の式で$C_u=1$, $C_d=0$とすることにより，$q_u=\pi_u/R$となり，株価が下落したときに1円受け取る証券の価格は$q_d=\pi_d/R$となるとが分かります．そこで，π_uとπ_dはそれぞれの状態での受け取り額の限界効用と状態の発生確率の積をそれらの和が1になるように標準化したものと考えることができます．もし受け取り額の限界効用が一定であれば，π_uとπ_dはそれぞれの状態の発生確率になります．受け取り額の限界効用が一定であるような人あるいは状況を危険中立的といいます．その意味で，π_uとπ_dを危険中立的確率と呼び，このような確率を使ってオプション価格を求めるやり方を危険中立的評価と呼びます．

この例の場合，状態依存証券が現実に存在しなくとも株式と債券を組み合わすことによってそのような証券を創りだすことができます．株式，債券，オプションを始め，期末の受け取り額が状態に依存して決まるようなすべての金融資産の裁定価格は，期末の受け取り額に状態依存証券の価格を掛けて合計することにより得られます．実際，株式の価格は$(u \cdot q_u+d \cdot q_d)S=S$となり，債券の価格は$(q_u+q_d)R=1$となります．

これまでオプションの裁定価格の求め方として，他の資産によってオプションを複製しその複製費用から価格を求める方法，危険中立的確率を求め期末の期待受け取り額の割り引き値から価格を求めるやり方，状態依存証券の価格を求めてそれからオプションの価格を求める考え方について説明してきました．これらは基本的には同一の考え方ですので，状況に応じてそれぞれの概念を使用します．

これまでは1期間で考えてきましたが，2期間の場合はどのようになるでしょうか．第2期目に1期間モデルを適用して1期末のオプション価格を求め，それを1期末のオプション価値としてもう一度1期間モデ

ルを適用することにより2期間のオプションの価格を求めることができます．1期後の株価が uS のときには，2期後の株価は u^2S か udS のいずれかになり，1期後の株価が dS のときには，2期後の株価は udS か d^2S のいずれかになるものとします．2期後のオプションからの利得を，株価に応じてそれぞれ C_{uu} C_{ud}, C_{dd} で表し，1期後の株価が uS のときのオプションの価格を C_u とすると，先の1期モデルでの式で S, uS, dS をそれぞれ uS, u^2S, udS に，C_u, C_d をそれぞれ C_{uu}, C_{ud} に代えることにより

$$C_u=[C_{uu}(R-d)/(u-d)+C_{ud}(u-R)/(u-d)]/R$$

または

$$C_u=(\pi_u C_{uu}+\pi_d C_{ud})/R$$

となります．同様にして，1期後の株価が dS のときのオプション価格 C_d を求め，この C_u と C_d を再び1期モデルに代入することにより

$$C=(\pi_u{}^2 C_{uu}+2\,\pi_u\pi_d C_{ud}+\pi_d{}^2 C_{dd})/R^2$$

という結果が得られます．$\pi_u{}^2+2\,\pi_u\pi_d+\pi_d{}^2=(\pi_u+\pi_d)^2$ ですから，$\pi_u{}^2, 2\,\pi_u\pi_d, \pi_d{}^2$ が2期後の状態についての危険中立的確率であり，2期後の状態依存証券の価格を q_{uu}, q_{ud}, q_{dd} とすると，

$$q_{uu}=\pi_u{}^2/R^2,\quad q_{ud}=2\,\pi_u\pi_d/R^2,\quad q_{dd}=\pi_d{}^2/R^2$$

となり，各資産の価格がこの状態依存証券の価格から求められることも容易に確認できます．

4．Black-Scholes 公式

これまでは将来の株価の実現値を予め決めてそれからオプション価格を求めました．しかし，実際このような実現値を決めることは困難で，むしろ，将来の株価を連続的な確率分布を有する確率変数と考える方が容易でしょう．株価は負になりませんから，正規分布のような分布は適当でないでしょう．数学的取り扱いの容易さとデータの適合度の良さから対数正規分布がよく利用されます．ある確率変数の確率分布が対数正規分布であると，その確率変数を対数変換したものの確率分布は正規分布になります．また，株価の変動を表すために

$$dS=\mu Sdt+\sigma Sdz$$

という確率微分が使われることもあります．現在の株価を S, T 期間後の株価を S^* とすると，株価の変動が上の確率微分であらわされるとき，$\log(S^*/S)$ の確率分布は平均 $(\mu-\sigma^2/2)\,T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布になります．前節で説明したモデルはある期の株価に対して次の期の株価は2個の値のいずれかであるという形になっていますが，期間の数を増やすことによって最後の期間での状態の数を増やすことができますし，一定の期間を小さな部分期間に分割してやれば，物理的な時間の長さを増加させることなしに状態の数を増加させることができます．ただし，部分期間の数の増加とともに u, d, R の値が変化することに注意する必要があります．これらの値と二つの株価の発生確率を適当に選択し，部分期間の数をどんどん増加させてやると，期間の最後での株価の確率分布が上の確率微分で表される株価の確率分布と一致するようにすることができます．このとき行使価格が E のコール・オプションの価格は次のようになります．

$$C=SN(d_1)-Ee^{-rT}N(d_2)$$

ここで

$$d_1=[\log(S/E)+(r+\sigma^2/2)\,T]/\sigma\sqrt{T},$$
$$d_2=d-\sigma\sqrt{T}$$

で，$N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数で，e^{-rT} は T 期後に1円受け取ることができる債券の現在の価格です．この式は最初にこの形のオプション価格を求めた人の名前をとって Black-Scholes 式と呼ばれています．この式の第2項の $N(d_2)$ は，$\log(S^*/S)$ の確率分布が平均 $(r-\sigma^2/2)\,T$, 分散 $\sigma^2 T$ の正規分布であるとしたとき S^* が行使価格 E 以下になる確率であり，それにたいし，$Se^{rT}N(d_1)$ は同じ確率分布について S^* の E 以上の部分についての部分期待値になっています．したがって，$B-S$ 公式によるオプション価格は満期時のオプションの利得 $\max\{S^*-E, 0\}$ の期待値に割り引き係数 e^{-rT} を掛けたものになっています．ただし，満期時の株価の確率分布について，$\log(S^*/S)$ の平均が実際には $(\mu-\sigma^2/2)\,T$ であるのに，オプション価格を求めるときには $(r-\sigma^2/2)\,T$ になっていることに注意してください．すなわち，この場合，確率微分の第1項の μ（株式の投資収益率）を r（無危険利子率）に代えたものが，危険中立的評価のために使用されることになります．

プット・オプションと株式を組み合わせると，オプションの満期時には，株価が行使価格を上回るときにはプットの権利は放棄され，株価が行使価格を下回るときには株式を相手に引渡すことによって行使金額を受け取りますから，プットと株式を組み合わせたものの価値は株価が行使価格を上回るときには株価と等しくなり，下回るときには行使価格に等しくなります．これに対して，このプット・オプションと同一の満期

と行使価格を有するコール・オプションと満期時の受け取り額が行使価格と等しくなるような債券を組み合わせると満期時の受け取り額は先のプットと株式の組合せと全く等しくなります．したがって，無裁定条件の下ではそれぞれの組合せの費用は等しくなり，満期までの期間が T で行使価格が E のコールとプットの価格をそれぞれ C と P，現在の株価を S とすると

$$P+S=C+e^{-rT}E$$

という関係が成立します．この関係をプット・コール・パリティといいます．プット・オプションの価格はこのプット・コール・パリティを利用して求めることができます．

これまではオプションの権利行使はオプションの満期に行われるものとして説明してきました．その意味でこれまで述べたオプション価格はヨーロピアン・オプションの価格ということになります．また，株式についてはオプションの満期まで配当の支払いがないものと仮定してきました．株式について配当の支払いがないときには，無裁定条件の下ではアメリカン・コール・オプションの価格は満期以前には株価から行使価格を差し引いたものを上回ることになりますので，アメリカン・オプションは満期以前に権利行使されることはありません．したがって，アメリカン・コール・オプションの価格はヨーロピアン・コール・オプションの価格に等しくなります．しかし，株式の配当がある時には満期前に権利行使を行って配当を受け取ることが有利になる可能性がありますから，アメリカンとヨーロピアンの価格は異なってきます．プット・オプションの場合は満期前に権利行使することにより満期時での権利行使と同一の金額を満期前に受け取れますので，株式の配当の有無に関係なく，アメリカンとヨーロピアンの価格は異なってきます．アメリカン・オプションの価格は満期時の期待受け取り額の割り引き値という形になりませんので，ヨーロピアン・オプション価格についての B-S 公式のような簡単な式は現在のところ得られていません．

5．金利オプション

最近，金利の変動が激しくなるとともに，固定金利と変動金利の交換（金利スワップ）や，交換する権利だけをもつスワップションなどが現れてきました．また，変動金利は金利が低いから良いが将来金利が高くなる危険性があると考える人にたいし，ある上限を決めて変動金利がその上限を越えて上昇したときには，上限金利を支払うだけで良いというキャップ付き金利契約があります．逆に下限の金利が決めてあって金利がその下限以下になっても下限金利を受け取ることができるフロア付き金利も現れてきています．スワップを除けばこれらはいずれもオプションの性質を持っています．これらのオプション価格を求めるためには，将来の金利の確率分布を考える必要があります．ただし，金利は債券の価格と一定の関係があり，また，金利には色々な期間の金利があります．これらの間の関係を適切に処理しないとどこかで裁定利益が生まれるような不完全なモデルができあがります．金利ではなく債券価格の確率分布を考えることもできますが，債券の満期時の受け取り額は，信用リスク（債務不履行リスク）が無視できるならば，確定的ですので，この点で株価の変動とは大きく異なります．すべての債券の価格の間の関係を説明できるようなモデルができれば理想的なのですが，簡単なモデルでは現実のデータとの整合性が著しく低くなります．そこで，現実のデータとの整合性をもたせながら理論的整合性（無裁定条件）を満足するようなものとして色々なタイプのモデルが提案されています．

5.1 債券価格，利回り，期間構造，フォワード・レート

満期まで利子の支払いを行わないゼロ・クーポン債について額面が100円で満期までの期間が n である債券の価格が B_n であると $(100/B_n)^{1/n}-1$ がこの債券の満期利回りあるいは最終利回りになります（利子が支払われるクーポン債では将来の利子と額面の支払い額の割り引き値が債券価格に等しくなるような割引き率を満期利回りと呼びますが，ここでは，ゼロ・クーポン債の利回りだけを考えてクーポン債は毎期のクーポン（利子支払い額）と額面からなる複合的な証券と考えます）．以下ではこれを n 期の利回りと呼ぶことにします．1期，2期と期間毎に利回りを並べたものを利子率の期間構造と呼びます．現在時点での金利にはここで述べた利回りの他に将来の二つの時点の間の貸借にたいして支払うべき利子率を現在時点で決めておくフォワード・レートがあります（これに対して上に述べた利回りをスポット・レートと呼びます）．1年，2年，3年の利回りがそれぞれ5％，5.5％，6％であると，1年後から3年後までの2年間金を借りたときの金利は，無裁定条件の下では現在から3年間金を借りるとともにその金を現在から1年間貸したとき

と同一ですから，$[(1.06)^3/(1.05)]^{1/2}-1$ となります．これは将来の期間についての金利ですが，現在時点で確定していますから，現在の金利ということになります．スポット・レートとフォワード・レートは時間の経過とともに変動していきます．これらの変動を表すものとして色々なモデルが試みられています．ただ，債券価格，スポット・レート，フォワード・レートは相互に一定の関係がありますから，それらのどれを使って金利変動を表しても良いのですが，変数間の関係を乱すようなやり方をしてはいけないことに注意してください．

5.2 Black-Derman-Toy モデル

ここでは Black-Derman-Toy のモデルを取り上げ金利の動きをどのようにモデル化するかを見てみます．まずデータとして利回りとそのボラティリティ（変動性）を考えます．1期，2期，3期の利回りが5％，5.5％，6％で，2期と3期の利回りのボラティリティが9.5％と9％であるとします（利回りのボラティリティについては後で説明します）．先の株式の場合と同様に1期後には二つの状態のいずれかが生じるものとし，それぞれの発生確率を1/2とします．先の例では株価の実際の動きを考えましたが，ここでは期待金額の割り引き値が資産の価格となるような危険中立的評価を考えます．1期後の1期間の利回りについて二つの可能性を考えてそれを r_u と r_d とします．2期後に満期となる債券の1期後の価格は利回りの定義から1期後の利回りに応じて $100/(1+r_u)$ か $100/(1+r_d)$ になります．危険中立的評価で考えていますからこの債券の現在時点での価格はこれらの債券価格の期待値を現在の1期間の利回りである5％で割り引いたものになります．他方，現在の2期間の利回りが5.5％ですから，

$$0.5\times[100/(1+r_u)+100/(1+r_d)]/1.05=100/(1.055)^2$$

が成立しなければなりません．確率1/2で二つの値 a と b をとる確率変数の分散は

$$(a^2+b^2)/2-(a+b)^2/4=(a-b)^2/4$$

となるので，標準偏差は $|a-b|/2$ となります．現在時点での n 期の利回りのボラティリティを1期後の二つの状態での $n-1$ 期の利回りを対数変換したものの標準偏差で測ることにします．2期間の利回りのボラティリティが9.5％ですから，$\log(r_u/r_d)/2=0.095$ となります．これら二つの式を満足するような r_u と r_d を求めると，$r_u=6.5742$％，$r_d=5.4366$％となります．次に1期後の2期間の利回りを R_u と R_d とすると，3期後に満期となる債券の1期後の価格は $100/(1+R_u)^2$ と $100/(1+R_d)^2$ になります．この債券の現在時点での価格は，危険中立的評価によりこれら二つの値の平均値を現在の1期間の利回りで割り引いたものです．そして，現在の3期間の利回りが6％ですから，

$$0.5\times[100/(1+R_u)^2+100/(1+R_d)^2]/1.05=100/(1.06)^3$$

が成立しなければなりません．他方，3期間の利回りのボラティリティは9％ですから $\log(R_u/R_d)/2=0.09$ となります．これら二つの式から R_u と R_d を求めると，$Ru=7.0925$％，$R_d=5.9242$％となります．2期後の1期間の利回りを r_{uu}，r_{ud}，r_{dd} とすると，3期後に満期となる債券については1期後のそれぞれの状態ごとに次に関係式が成立します．

$$0.5\times[100/(1+r_{uu})+100/(1+r_{ud})]/(1+r_u)=100/(1+R_u)^2$$

$$0.5\times[100/(1+r_{ud})+100/(1+r_{dd})]/(1+r_d)=100/(1+R_d)^2$$

二つの式に対して未知数は3個ですから，それぞれの状態での利回りのボラティリティは等しいものと仮定して，$r_{uu}/r_{ud}=r_{ud}/r_{dd}$ となるようにします．これらの式から r_{uu}，r_{ud}，r_{dd} を求めると，$r_{uu}=8.2689$％，$r_{ud}=6.9573$％，$r_{dd}=5.8793$％となります．

ここでは，3期の利回りまでしかデータが与えられていませんので，3期後の利回りまでしか求めることができませんが，もっと長期間の利回りとそのボラティリティを与えてやれば，同じような方法で危険中立的な将来の利回りを求めることができます．将来の利回りが求まればそれから将来の債券価格とフォワード・レートを求めることができますので，それらのものを基礎にしたオプションの価格も容易に求めることができます．

6．オプションの効用

一般にあるものの評価というときにはそのものの価格のことを指しているのでしょうか．確かにあるものを評価するというときに，そのものの値段あるいは価格を求めることもありますが，そのものの有用性とかそのものの価値を指すことも少なくありません．そこで最後にオプションの有用性について考えてみたいと思います．これまで説明してきたオプションの価格理論から明らかなように他の資産を組み合わせてオプシ

ョンと同一の効果をもつものを創りだすことができますから取引費用が無視できるならば，オプションの取引そのものは必要がないことになります．ここで取引費用と呼んでいるものは資産の売買に伴う金銭の支出だけではなく情報の収集や各種の計算の費用も含まれます．現実には取引費用がかかりますから，オプションの取引はこうした取引費用の節減に役立つものと考えられます．現物，先物，オプション，スワップなどを組み合わせていちばん安い費用で求めるものを獲得することが必要になります．オプション価格について説明したところから明らかなように，コール・オプションの購入は資産の購入と借入を組み合わせたものになっていますから，将来の資産価格についての予想が的中すれば，同じ投資金額で資産を購入するのに比較して大きな利益をあげることができます．オプションを組み合わせることにより，状態に応じて生じる利得のパターンを色々に変化させることもできますが，それらのことを行うためには費用がかかります．外国為替を中心にゼロ・コスト・オプションと呼ばれるものが盛んに取引されたことがありますが，これはオプションの売りと買いを組み合わせてオプション価格の受け取り分と支払い分が一致するようにしただけであって，コストがゼロになる代わりに他のリスクを負担することになります．取引費用を十分に考慮していないこれまでのポートフォリオ理論ではオプションの売買についての理論的指針を与えることは困難といわざるを得ません．今後の研究課題ということになるのではないでしょうか．

参考文献

ここではオプション理論について2項モデルを中心に説明しました．確率過程理論を基礎に連続時間モデルを勉強するのには田畑吉雄「数理ファイナンス論」(牧野書店)，森村英典・木島正明「ファイナンスのための確率過程」(日科技連)，木島正明「ファイナンス工学入門」(日科技連)，沢木勝茂「ファイナンスの数理」(朝倉書店) 等があります．